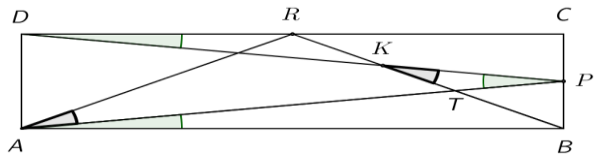
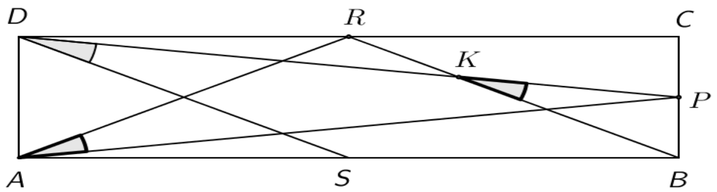
KURATORIUM OŚWIATY
W KRAKOWIE

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ Z KARTY ODPOWIEDZI

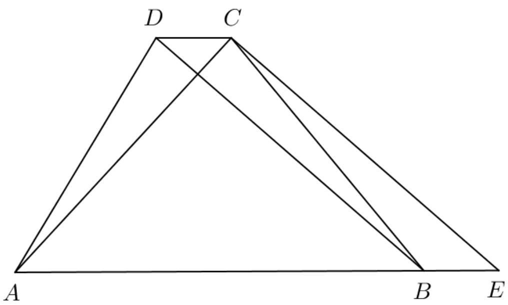
SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ TESTOWYCH

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Miejsce na odpowiedź ucznia				
		A	B	C	D	E
1	2					X
2	2		X			
3	2				X	
4	2					X
5	2					X
6	2	X				
7	2		X			
8	2	X				
9	2					X
10	2				X	
11	2	X				
12	2		X			
13	3			X		
14	3			X		
15	3	BD				
SUMA PUNKTÓW						33

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

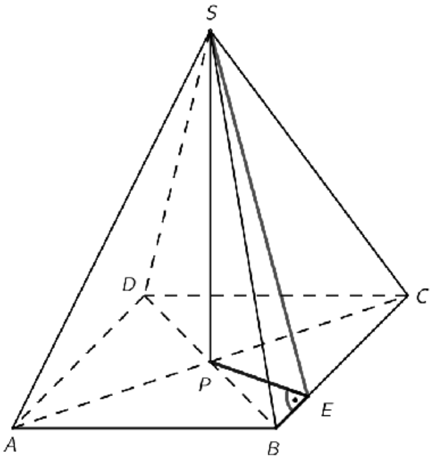
Nr zad.	Maks. liczba pkt	Odpowiedzi	Zasady przyznawania punktów
16	**4**	dowód	***<u>Przykładowe rozwiązanie 1:</u>***  Niech $\vert\angle PDC\vert = \vert\angle PAB\vert = \alpha$ (z przystawania trójkątów ABC i CDP) oraz $\vert\angle PAR\vert = \beta$. Wtedy $\vert\angle RAB\vert = \vert\angle ABR\vert = \alpha + \beta$ (trójkąt ABR jest równoramienny). Ponadto $\vert\angle DPA\vert = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha) = 2\alpha$. Zatem $\vert\angle KTP\vert = \vert\angle ATB\vert = 180^\circ - 2\alpha - \beta$. Ostatecznie $\vert\angle BKP\vert = 180^\circ - [(180^\circ - 2\alpha - \beta) + 2\alpha] = \beta = \vert\angle PAR\vert$. **4p** – przeprowadzenie pełnego dowodu tezy zadania. **3p** – zauważenie, że $\vert\angle RAB\vert = \vert\angle ABR\vert = \alpha + \beta$ **oraz** $\vert\angle DPA\vert = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ **oraz** $\vert\angle KTP\vert = \vert\angle ATB\vert = 180^\circ - 2\alpha - \beta$ i poprzestanie na tym. **2p** – zauważenie, że $\vert\angle RAB\vert = \vert\angle ABR\vert = \alpha + \beta$ **oraz** $\vert\angle DPA\vert = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ i poprzestanie na tym. **1p** – zauważenie, że $\vert\angle RAB\vert = \vert\angle ABR\vert = \alpha + \beta$ **albo**, że $\vert\angle DPA\vert = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozumowanie **lub** brak dowodu. ***<u>Przykładowe rozwiązanie 2:</u>***  Niech S będzie środkiem boku AB. Wtedy $DS \parallel RB$. Z tego wynika (kąty odpowiadające), że $\vert\angle SDP\vert = \vert\angle BKP\vert$. Ponieważ trójkąty SDP i PAR są przystające, więc $\vert\angle SDP\vert = \vert\angle PAR\vert$. Zatem $\vert\angle PAR\vert = \vert\angle BKP\vert$. **4p** – przeprowadzenie pełnego dowodu tezy zadania. **3p** – zauważenie i uzasadnienie, że $\vert\angle SDP\vert = \vert\angle BKP\vert$ **oraz** $\vert\angle SDP\vert = \vert\angle PAR\vert$ i poprzestanie na tym. **2p** – zauważenie i uzasadnienie, że $\vert\angle SDP\vert = \vert\angle BKP\vert$ i poprzestanie na tym. **1p** – zauważenie że $DS \parallel RB$ i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozumowanie **lub** brak dowodu. **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawione przyznajemy 4 punkty.**

17	**5**	0	***Przykładowe rozwiązanie:*** Zauważmy, że $1^2+3^2=10$, $2^2+4^2=20$, $6^2+8^2=100$, $7^2+9^2=130$, $11^2+13^2=290$ itd., $97^2+99^2=19210$. Ponadto suma $5^2+15^2+25^2+...+95^2$ (przy parzystej liczbie składników) ma cyfrę jedności równą 0. Ponieważ cyfrą jedności tak utworzonych sum jest 0, zatem cyfrą jedności całej sumy jest 0. **5p** – poprawne metody oraz bezbłędne obliczenia wraz z uzasadnieniem prowadzące do podania w odpowiedzi cyfry jedności danej liczby. **4p** – zauważenie, że wszystkie sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych różniących się o 2 (i takie, że mniejsza z tych liczb kończy się jedną z cyfr: 1, 2, 6 lub 7), mają cyfrę jedności równą 0 **oraz** uzasadnienie, że suma $5^2+15^2+25^2+...+95^2$ ma cyfrę jedności równą 0 i poprzestanie na tym. **3p** – zauważenie że wszystkie sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych różniących się o 2 (i takie, że mniejsza z tych liczb kończy się jedną z cyfr: 1, 2, 6 lub 7), mają cyfrę jedności równą 0 **oraz**, że suma $5^2+15^2+25^2+...+95^2$ ma cyfrę jedności równą 0 (bez uzasadnienia) i poprzestanie na tym. **2p** – zauważenie, że wszystkie sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych różniących się o 2 (i takie, że mniejsza z tych liczb kończy się jedną z cyfr: 1, 2, 6 lub 7), mają cyfrę jedności równą 0 i poprzestanie na tym **albo** uzasadnienie, że suma $5^2+15^2+25^2+...+95^2$ ma cyfrę jedności równą 0 i poprzestanie na tym. **1p** – zauważenie że niektóre sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych różniących się o 2 mają cyfrę jedności równą 0 (minimum 4 takie sumy, np. tylko dla kwadratów liczb jednocyfrowych). **albo** zauważenie bez uzasadnienia, że suma $5^2+15^2+25^2+...+95^2$ ma cyfrę jedności równą 0 i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnej odpowiedzi bez uzasadnienia**. **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona przyznajemy 5 punktów.**
18	**2**	**a)** 13	***Przykładowe rozwiązanie:*** **a)** Wszystkie możliwości można wypisać zaczynając od najmniejszej liczby trzycyfrowej, która przy dzieleniu przez 41 daje resztę 1 czyli od liczby124. Następnie wystarczy dodawać kolejno 41, aż otrzymamy ostatnią taką liczbę trzycyfrową, czyli 985, kontrolując, czy otrzymana liczba spełnia warunki zadania (liczba trzycyfrowa o różnych cyfrach, bez cyfry 0). Szukane liczby to: 124, 165, 247, 329, 452, 493, 534, 657, 698, 739, 821, 862, 985. **b)** Aby zliczyć wszystkie właściwe liczby wystarczy podzielić je na dwa rozłączne podzbiory: cyfra setek 1, 2, 3, 4, 5, 6 oraz cyfra setek 7. Korzystając z reguły mnożenia w pierwszym przypadku otrzymujemy $6\cdot8\cdot7$ możliwości, natomiast w drugim – $1\cdot6\cdot7$ możliwości. Zatem wszystkich takich liczb razem jest $336+42=378$. **Odpowiedź: a) Takich liczb jest 13.** **b) Takich liczb jest 378.** **a)** **2p** – wypisanie i zliczenie wszystkich możliwości (13). **1p** – pominięcie przy wypisywaniu i zliczaniu **jednej lub dwóch** możliwości **albo** wypisanie i zliczenie wszystkich właściwych możliwości oraz jednej lub dwóch liczb trzycyfrowych, które dają przy dzieleniu przez 41 resztę 1, ale zawierają 0 lub jej cyfry się powtarzają. **0p** – pominięcie co najmniej trzech możliwości **lub** podanie co najmniej trzech błędnych rozwiązań **lub podanie poprawnej odpowiedzi bez uzasadnienia**.

<table>
<tr><td>18</td><td>4</td><td>b) 378</td><td>b)
4p – prawidłowe zliczenie wszystkich możliwości ($336+42=378$).
3p – zastosowanie prawidłowej metody zliczania liczby wszystkich możliwości obydwu podzbiorów ($6\cdot 8\cdot 7$ i $1\cdot 6\cdot 7$), ale popełnienie błędów rachunkowych przy obliczaniu ich sumy.
2p – zastosowanie prawidłowej metody zliczania liczby wszystkich możliwości jednego z podzbiorów ($6\cdot 8\cdot 7$ lub $1\cdot 6\cdot 7$) i poprzestanie na tym.
1p – zauważenie, że wystarczy podzielić wszystkie właściwe liczby na dwa rozłączne podzbiory (cyfra setek 1, 2, 3, 4, 5, 6 oraz cyfra setek 7) i poprzestanie na tym.
0p – zastosowanie błędnej metody lub podanie poprawnej odpowiedzi bez uzasadnienia.
Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona przyznajemy odpowiednio 2 pkt za odpowiedź a) i 4 pkt za odpowiedź b).</td></tr>
<tr><td>19</td><td>6</td><td>384 cm^2</td><td><u>Przykładowe rozwiązanie:</u>
Prowadzimy odcinek CE równoległy do przekątnej BD trapezu $ABCD$ tak, aby punkt E leżał na przedłużeniu podstawy AB.


Ponieważ trójkąty ACD i BCD mają tę samą podstawę i równe wysokości, zatem $P_{ACD}=P_{BCD}$. Skoro czworokąt $DBEC$ jest równoległobokiem, a CB jego przekątną, więc $P_{BCD}=P_{BEC}$. Ponadto $P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{ACD}=P_{ABC}+P_{BEC}=P_{AEC}$.
W trójkącie AEC mamy dane: $|AC|=24\ cm$, $|CE|=|BD|=32\ cm$, $|AE|=30\ cm+10\ cm=40\ cm$. Ponieważ $32^2+24^2=40^2$, zatem trójkąt AEC jest prostokątny. Stąd $P_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 32\ cm\cdot 24\ cm=384\ cm^2$.
Odpowiedź: Pole trapezu ABCD jest równe $384\ cm^2$.
6p – poprawne metody oraz bezbłędne obliczenia prowadzące do podania w odpowiedzi pola trapezu.
5p – przeprowadzenie rozumowania do momentu uzyskania informacji o tym, że trójkąt AEC jest prostokątny i poprzestanie na tym.
4p – przeprowadzenie rozumowania do momentu uzyskania informacji o tym, jakie są długości boków trójkąta AEC i poprzestanie na tym.
3p – uzasadnienie, że $P_{ABCD}=P_{AEC}$ i poprzestanie na tym.
2p – zauważenie, a także uzasadnienie, że $P_{ACD}=P_{BCD}$ oraz $P_{BCD}=P_{BEC}$ i poprzestanie na tym.
1p – zauważenie, a także uzasadnienie, że $P_{ACD}=P_{BCD}$ albo $P_{BCD}=P_{BEC}$ i poprzestanie na tym.
0p – błędne rozwiązanie lub podanie poprawnej odpowiedzi bez obliczeń i uzasadnienia.
Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona przyznajemy 6 punktów.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>20</td>
<td>6</td>
<td>Długość wysokości ściany bocznej jest równa 15 cm.

Objętość ostrosłupa wynosi $1000\sqrt{2}\ cm^3$</td>
<td>
<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>


Niech SE będzie wysokością ściany bocznej SBC, a punkt P – punktem przecięcia przekątnych rombu. Odcinek PE jest wysokością trójkąta prostokątnego PBC poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Podstawa ostrosłupa jest rombem składającym się z dwóch trójkątów równobocznych, czyli $|PB| = \frac{1}{2}|DB| = \frac{1}{2} \cdot 20\ cm = 10\ cm$. Ze związków miarowych w trójkącie PBC $(30°, 60°, 90°)$ wynika, że $|PE| = 5\sqrt{3}\ cm$.
Ponieważ trójkąt PES jest prostokątny, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:
$|SE|^2 = |PE|^2 + |PS|^2 = (5\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{6})^2 = 75 + 150 = 225$.
Z tego wynika, że $|SE| = 15\ cm$.
Objętość ostrosłupa obliczamy ze wzoru $V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABCD} \cdot |PS|$.
$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABD} = 2 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} = 200\sqrt{3}\ cm^2$.
W związku z tym $V = \frac{1}{3} \cdot 200\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{6} = \frac{1000}{3}\sqrt{18} = 1000\sqrt{2}\ cm^3$.
Odpowiedź: Długość wysokości ściany bocznej, poprowadzonej na krawędź podstawy ostrosłupa jest równa 15 cm. Objętość ostrosłupa wynosi $1000\sqrt{2}\ cm^3$.
6p – poprawne metody oraz bezbłędne obliczenia prowadzące do podania w odpowiedzi długości wysokości ściany bocznej, poprowadzonej na krawędź podstawy ostrosłupa oraz objętości tego ostrosłupa (akceptujemy wynik $\frac{1000}{3}\sqrt{18}\ cm^3$).
5p – obliczenie długości wysokości ściany bocznej, poprowadzonej na krawędź podstawy ostrosłupa oraz pola podstawy tego ostrosłupa i poprzestanie na tym
albo obliczenie objętości ostrosłupa oraz obliczenie $|PE|$ i poprzestanie na tym.
4p – obliczenie długości wysokości ściany bocznej, poprowadzonej na krawędź podstawy ostrosłupa i poprzestanie na tym
albo obliczenie $|PE|$ oraz wyznaczenie pola podstawy ostrosłupa i poprzestanie na tym
albo obliczenie $|PB|$ oraz obliczenie objętości ostrosłupa i poprzestanie na tym.
</td>
</tr>
</table>

			3p – obliczenie objętości ostrosłupa **oraz** zauważenie, że odcinek PE jest wysokością trójkąta prostokątnego PBC poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego i poprzestanie na tym **albo** wyznaczenie pola podstawy ostrosłupa **oraz** obliczenie $\lvert PB \rvert$ i poprzestanie na tym **albo** obliczenie $\lvert PE \rvert$ i poprzestanie na tym. **2p** – obliczenie objętości ostrosłupa i poprzestanie na tym **albo** zauważenie, że odcinek PE jest wysokością trójkąta prostokątnego PBC poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego **oraz** obliczenie $\lvert PB \rvert$ i poprzestanie na tym **albo** wyznaczenie pola podstawy ostrosłupa **oraz** zauważenie, że odcinek PE jest wysokością trójkąta prostokątnego PBC poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego i poprzestanie na tym. **1p** – wyznaczenie pola podstawy ostrosłupa i poprzestanie na tym **albo** zauważenie, że odcinek PE jest wysokością trójkąta prostokątnego PBC poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnych odpowiedzi bez obliczeń**. **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona przyznajemy 6 punktów**.