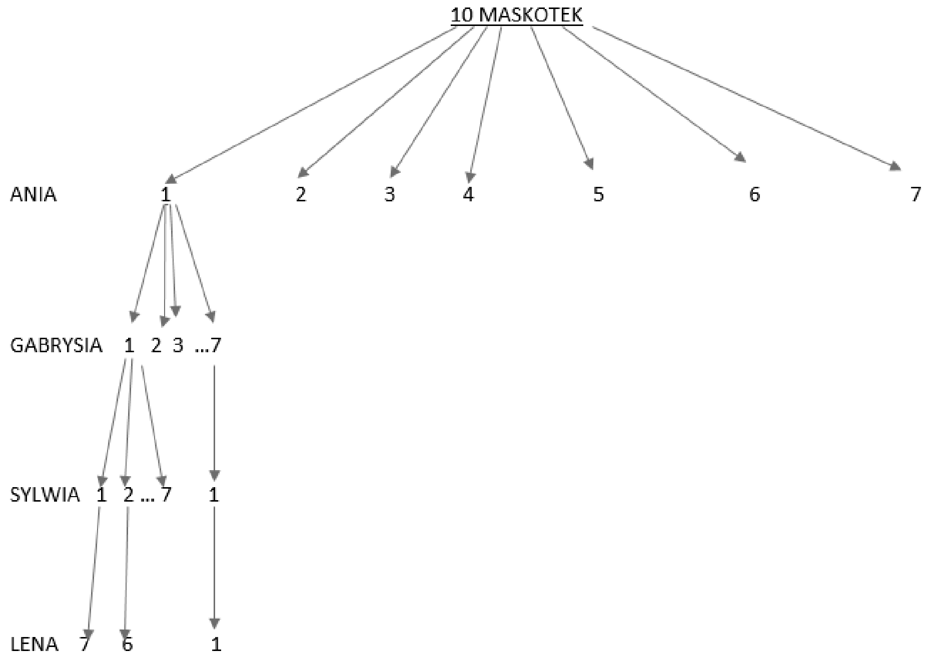
SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ Z KARTY ODPOWIEDZI

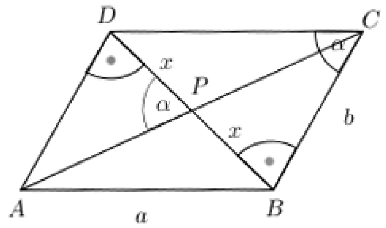
SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ TESTOWYCH

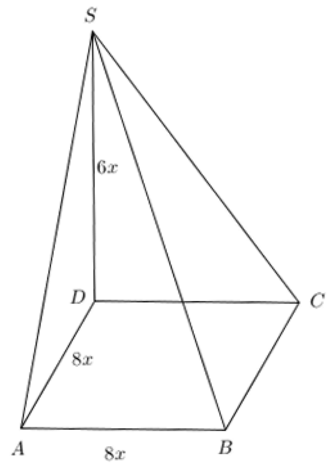
Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Miejsce na odpowiedź ucznia				
		A	B	C	D	E
1.	3				X	
2.	3	X				
3.	3		X			
4.	3					X
5.	3				X	
6.	3			X		
7.	3		X			
8.	3					X
9.	3		X			
10.	3	X				
11.	3			X		
12.	3			X		
SUMA PUNKTÓW						36

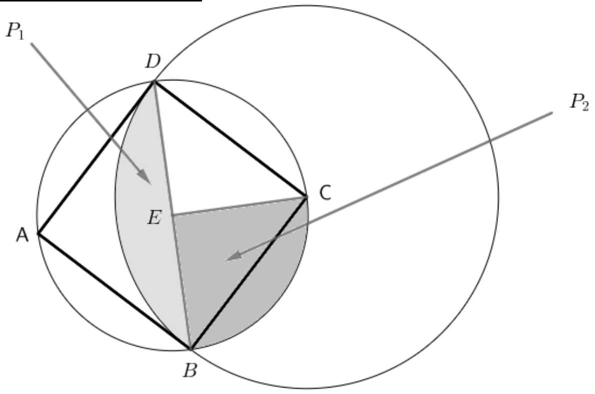
SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Nr zad.	**Maks. liczba pkt**	**Odpowiedzi**	**Zasady przyznawania punktów**
13	4	84 sposoby	**4p** – poprawne metody prowadzące do podania w odpowiedzi liczby sposobów podziału między czterema dziewczynkami 10 jednakowych maskotek tak, aby każda z nich otrzymała co najmniej jedną. ***<u>Przykładowe rozwiązanie nr 1:</u>*** Liczbę wszystkich możliwości można zliczyć na podstawie następującego schematu:  I główna gałąź 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 II główna gałąź 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 III główna gałąź 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 IV główna gałąź 4 + 3 + 2 + 1 = 10 V główna gałąź 3 + 2 + 1 = 6 VI główna gałąź 2 + 1 = 3 VII główna gałąź 1 Ostatecznie wszystkich możliwości jest 28+21+15+10+6+3+1=84. **Odpowiedź: Wszystkich możliwości jest 84.** **3p** – zliczenie wszystkich sposobów w ramach pięciu z wymienionych gałęzi i poprzestanie na tym. **2p** – zliczenie wszystkich sposobów w ramach trzech z wymienionych gałęzi i poprzestanie na tym. **1p** – zliczenie wszystkich sposobów w ramach jednej z wymienionych gałęzi i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnej odpowiedzi bez obliczeń.**

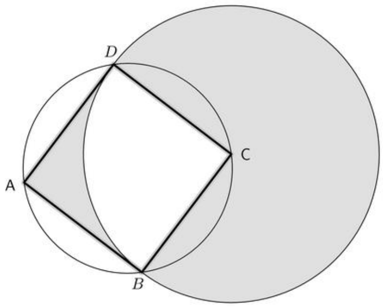
13			***Przykładowe rozwiązanie nr 2:*** Przedstawiamy liczbę 10 jako sumę czterech liczb całkowitych dodatnich dzieląc je pewne podgrupy: 1) 10=1+1+1+7 lub 10=2+2+2+4 lub 10=3+3+3+1 W każdej z tych możliwości istnieją 4 różne sposoby rozdziału maskotek, zatem razem mamy 12 sposobów. 2) 10=1+1+2+6 lub 10=1+1+3+5 lub 10=2+2+5+1 W każdej z tych możliwości istnieje 12 różnych sposobów rozdziału maskotek, zatem razem mamy 36 sposobów. 3) 10=1+1+4+4 lub 10=2+2+3+3 W każdej z tych możliwości istnieje 6 różnych sposobów rozdziału maskotek, zatem razem mamy 12 sposobów. 4) 10=1+2+3+4 W tej możliwości istnieją 24 różne sposoby rozdziału maskotek. Ostatecznie wszystkich możliwości jest 12+36+12+24=84. **Odpowiedź: Wszystkich możliwości jest 84.** **3p** – zliczenie wszystkich sposobów w ramach trzech z wymienionych podgrup i poprzestanie na tym. **2p** – zliczenie wszystkich sposobów w ramach dwóch z wymienionych podgrup i poprzestanie na tym. **1p** – zliczenie wszystkich sposobów w ramach jednej z wymienionych podgrup i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnej odpowiedzi bez obliczeń.** **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona, przyznajemy 4 punkty.**

14	4		**4p** – pełen dowód własności. ***<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>*** Niech $\|AB\| = a$ i $\|BC\| = b$ będą długościami boków oraz $\|BD\| = 2x$ - długością przekątnej *BD* równoległoboku *ABCD*.  Wtedy tezę możemy zapisać w postaci $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Trójkąty *DCB* i *DPA* są prostokątne i mają kąty ostre przy wierzchołkach *C* i *P* równej miary. Zatem na mocy cechy *kkk* są to trójkąty podobne. Stąd otrzymujemy $\frac{\|BC\|}{\|BD\|} = \frac{\|DP\|}{\|AD\|}$, czyli $\frac{b}{2x} = \frac{x}{b}$, więc $b^2 = 2x^2$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DCB* otrzymujemy $\|DC\| = \sqrt{\|BC\|^2 + \|BD\|^2}$ czyli $a = \sqrt{b^2 + (2x)^2} = \sqrt{b^2 + 4x^2} = \sqrt{b^2 + 2b^2} = b\sqrt{3}$. Wynika z tego, że $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **3p** – zapisanie zależności wynikającej z podobieństwa trójkątów *DCB* i *DPA* np. $\frac{\|BC\|}{\|BD\|} = \frac{\|DP\|}{\|AD\|}$ oraz zapisanie warunku wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DCB* np. $\|DC\| = \sqrt{\|BC\|^2 + \|BD\|^2}$ i poprzestanie na tym. **2p** – zapisanie zależności wynikającej z podobieństwa trójkątów *DCB* i *DPA* np. $\frac{\|BC\|}{\|BD\|} = \frac{\|DP\|}{\|AD\|}$ **lub** zauważenie, że trójkąty *DCB* i *DPA* są podobne oraz zapisanie warunku wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DCB* np. $\|DC\| = \sqrt{\|BC\|^2 + \|BD\|^2}$ i poprzestanie na tym. **1p** – zauważenie, że trójkąty *DCB* i *DPA* są podobne **lub** zapisanie warunku wynikającego z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DCB* np. $\|DC\| = \sqrt{\|BC\|^2 + \|BD\|^2}$ i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub** brak dowodu **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona, przyznajemy 4 punkty.**

15	5	$\frac{7}{2}\sqrt{41}\,cm$	**5p** – bezbłędne obliczenia prowadzące do podania długości najdłuższej krawędzi ostrosłupa. ***<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>*** Dany jest ostrosłup *ABCDS*, gdzie kwadrat *ABCD* jest jego podstawą, odcinek *DS* jego wysokością, prostopadłą do podstawy *ABCD*.  Zauważmy, że ściany boczne *DSC* i *ADS* są przystającymi trójkątami prostokątnymi, zatem z twierdzenia Pitagorasa $\lvert SC\rvert = \lvert AS\rvert = \sqrt{(8x)^2 + (6x)^2} = \sqrt{64x^2 + 36x^2} = \sqrt{100x^2} = 10x$. Pozostałe dwie ściany boczne *ABS* i *BCS* również są przystającymi trójkątami prostokątnymi o przeciwprostokątnej BS równej $\sqrt{(10x)^2 + (8x)^2} = \sqrt{100x^2 + 64x^2} = \sqrt{164x^2} = 2\sqrt{41}x$. Odcinek *BS* jest <u>najdłuższą</u> krawędzią tego ostrosłupa. Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa ABCDS $P_b = 2 \cdot P_{\Delta ADS} + 2 \cdot P_{\Delta ABS}$ czyli $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 8x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10x \cdot 8x = 392$ $48x^2 + 80x^2 = 392$ $128x^2 = 392$ więc $x = 1{,}75$. Ostatecznie $\lvert BS\rvert = 2\sqrt{41} \cdot 1{,}75 = 3{,}5\sqrt{41}$ *cm*. **Odpowiedź: Najdłuższa krawędź ostrosłupa ma długość $3{,}5\sqrt{41}$ *cm*.** **4p** – obliczenie $x = 1{,}75$ i poprzestanie na tym. **3p** – obliczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa oraz ułożenie równania np. $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 8x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10x \cdot 8x = 392$ i poprzestanie na tym. **2p** – obliczenie długości odcinka *SC* oraz *BS* i poprzestanie na tym. **1p** – obliczenie długości odcinka *SC* lub *BS* i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnej odpowiedzi bez obliczeń.** **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona, przyznajemy 5 punktów.**

<table>
<tr>
<td>16</td>
<td>5</td>
<td>$2\pi+4$</td>
<td>
5p – bezbłędne obliczenia prowadzące do podania pola zacieniowanej figury.
<u>Przykładowe rozwiązanie nr 1:</u>


Z danych zadania wnioskujemy, że długości odcinków DE, EC i BE są takie same i równe $\sqrt{2}$. Obliczamy pola figur pomocniczych:
$P_1 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = \pi - 2$, $P_2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$, wtedy $2\cdot P_2 = \pi$.
Ponadto pole koła o środku w punkcie E i promieniu EC jest równe $\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$, natomiast pole koła o środku w punkcie C i promieniu CD jest równe $\pi\cdot 2^2 = 4\pi$.
Ostatecznie szukane pole obszaru jest równe
$2\pi + 4\pi - \pi - \pi - 2(\pi - 2) = 2\pi + 4$.
Odpowiedź: Pole zacieniowanego obszaru jest równe $2\pi+4$.
4p – prawidłowe zapisanie wyrażenia opisującego pole szukanego obszaru np. $2\pi + 4\pi - \pi - \pi - 2(\pi - 2)$ i popełnienie błędów rachunkowych przy jego upraszczaniu.
3p – obliczenie pól P_1, P_2 oraz pól dwóch kół i poprzestanie na tym.
2p – obliczenie obydwu pól P_1 i P_2 lub obliczenie pól dwóch kół oraz jednego z pól P_1, P_2 i poprzestanie na tym.
1p – obliczenie tylko pola P_1 lub obliczenie tylko pola P_2 lub obliczenie pól dwóch kół i poprzestanie na tym.
0p – błędne rozwiązanie lub podanie poprawnej odpowiedzi bez obliczeń.
</td>
</tr>
</table>

16			***Przykładowe rozwiązanie nr 2:***  Pola odcinków koła o łukach *AD*, *DC*, *CB* i *AB* są takie same, zatem te związane z łukami *AD* i *AB* mogą wypełnić te niezamalowane o łukach *DC* i *AB*, zatem obliczenie pola zacieniowanego obszaru sprowadza się do obliczenia pola P_1 jako $\frac{3}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD* oraz pola P_2 jako różnicy pola kwadratu *ABCD* i $\frac{1}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD*. Zatem $P_1 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = 3\pi$, $P_2 = 2^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = 4 - \pi$. Ostatecznie pole zacieniowanego obszaru jest równe $3\pi + 4 - \pi = 2\pi + 4$. **Odpowiedź: Pole zacieniowanego obszaru jest równe** $2\pi + 4$. **4p** – obliczenie obydwu pól P_1 oraz P_2 i poprzestanie na tym. **3p** – obliczenie pola P_1 oraz zauważenie pole P_2 jest różnicą pola kwadratu *ABCD* i $\frac{1}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD* **lub** obliczenie pola P_2 oraz zauważenie, że pole P_1 to $\frac{3}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD* i poprzestanie na tym. **2p** – zauważenie, że pole P_1 to $\frac{3}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD* oraz zauważenie, że pole P_2 jest różnicą pola kwadratu *ABCD* i $\frac{1}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD* **lub** obliczenie tylko pola P_1 **lub** obliczenie tylko pola P_2 i poprzestanie na tym. **1p** – zauważenie, że pole P_1 to $\frac{3}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD* **lub** zauważenie, że pole P_2 jest różnicą pola kwadratu *ABCD* i $\frac{1}{4}$ pola koła o środku w punkcie *C* i promieniu *AD* i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnej odpowiedzi bez obliczeń.** **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona, przyznajemy 5 punktów.**

17	6	$x = 49\,\mathrm{kg}$ $y = 57\,\mathrm{kg}$	**6p** – poprawne metody oraz bezbłędne obliczenia prowadzące do podania wagi najcięższej dziewczyny i najcięższego chłopca. ***<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>*** Niech *x* – waga najcięższej dziewczyny *y* – waga najcięższego chłopca *a* – suma wag dziewcząt z pominięciem wagi najcięższej dziewczyny *b* – suma wag chłopców z pominięciem wagi najcięższego chłopca Z warunków zadania wynika, że $\begin{cases} \frac{a+b}{14} = 49{,}5 \\ \frac{a}{6} + 7 = \frac{b}{8} \end{cases}$. Zatem $\begin{cases} a+b=693 \\ 4a+168=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=693 \\ 4a+168=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=693-a \\ 4a+168=3(693-a) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b=693-a \\ 4a+168=2079-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=693-a \\ 7a=1911 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=273 \\ b=420 \end{cases}$. Ponadto $\frac{273+x}{7} = 46$ i $\frac{420+y}{9} = 53$, czyli $x = 49$ i $y = 57$. **Odpowiedź: Najcięższa dziewczyna waży 49 kg, natomiast najcięższy chłopiec 57 kg.** **5p** – obliczenie jednej z poszukiwanych wielkości ($x = 49$ lub $y = 57$) i poprzestanie na tym. **4p** – bezbłędne rozwiązanie układu równań prowadzącego do znalezienia wielkości $a = 273$ oraz $b = 420$ i poprzestanie na tym. **3p** – doprowadzenie układu równań do postaci, w której jedno z równań posiada tylko jedną niewiadomą np. $\begin{cases} b=693-a \\ 4a+168=3(693-a) \end{cases}$ i poprzestanie na tym. **2p** – zapisanie układu równań z niewiadomymi *a* oraz *b* np. $\begin{cases} \frac{a+b}{14} = 49{,}5 \\ \frac{a}{6} + 7 = \frac{b}{8} \end{cases}$ i poprzestanie na tym. **1p** – opisanie czterech niewiadomych *x*, *y*, *a*, *b* i poprzestanie na tym. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnych odpowiedzi bez obliczeń.** **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona, przyznajemy 6 punktów.**

17	6	$x = 49\,kg$ $y = 57\,kg$	**6p** – pełne rozwiązanie bez błędów rachunkowych. **5p** – rozwiązanie zadania z błędami rachunkowymi **lub** obliczenie jednej z poszukiwanych wielkości i poprzestanie na tym. **4p** – doprowadzenie układu do równania z jedna niewiadomą **lub** ułożenie równania z jedną niewiadomą **lub** popełnienie błędu metodycznego podczas rozwiązywania układu lub równania. **3p** – ułożenie układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi, prowadzącego do rozwiązania zadania. **2p** – poprawna metoda wyznaczenia sumy mas najcięższego chłopca i najcięższej dziewczynki **lub** wyznaczenie średniej wagi 6 dziewcząt (45,5 kg) i średniej wagi 6 chłopców (52,5 kg). **1p** – poprawna metoda wyznaczenia łącznej masy chłopców i łącznej masy dziewcząt **lub** rozpatrzenia szczególnego przypadku dla odgadnietego poprawnego rozwiązania. **0p** – błędne rozwiązanie **lub podanie poprawnych odpowiedzi bez obliczeń.** **Uwaga: Za poprawne rozwiązanie zadania inną metodą niż przedstawiona, przyznajemy 6 punktów.**