SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Klucz odpowiedzi				
		A	B	C	D	E
1.	2	X				
2.	2		X			
3.	2			X		
4.	2				X	
5.	2			X		
6.	2		X			
7.	2		X			
8.	2	X				
9.	3				X	X
10.	3				X	
11.	3					X
12.	3			X		
13.	3		X			
14.	3					X

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania zamknięte: **34**

W związku z wątpliwościami dotyczącymi sformułowań użytych w odpowiedziach, w zadaniu **9.** uczeń otrzymuje 3 punkty za zaznaczenie samej odpowiedzi D lub samej odpowiedzi E lub obu odpowiedzi D i E.

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

1. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie poprawnie alternatywnym sposobem, otrzymuje pełną liczbę punktów.
2. Jeśli uczeń popełnia błędy rachunkowe, ale **sposób** rozwiązania zadania jest w całości poprawny, rozwiązanie konsekwentnie doprowadzone do końca, a błąd nie powoduje znacznego uproszczenia zadania, to uczeń traci tylko 1 punkt za zadanie (bez względu na etap, na którym błąd został popełniony).

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania otwarte: **26**

ZADANIE 15. **8p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>a) 6,
b) 3 lub 4,
c) I FAŁSZ
II FAŁSZ
III PRAWDA
d) $4 \cdot 9 \cdot 35$,
$4 \cdot 15 \cdot 21$,
$6 \cdot 10 \cdot 21$,
$6 \cdot 6 \cdot 35$,
$6 \cdot 14 \cdot 15$,
$9 \cdot 10 \cdot 14$.</td><td><u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

a) Jest 6 takich liczb (4, 6, 9, 10, 14, 15).

b) Liczba półpierwsza ma 3 lub 4 dzielniki naturalne.

e) I FAŁSZ, II FAŁSZ, III PRAWDA

c) Rozkładamy liczbę 1260 na czynniki pierwsze: $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.
Mamy 6 liczb pierwszych, dobieramy je w pary i mnożymy, tworząc trzy liczby półpierwsze.
Znajdujemy 6 takich iloczynów liczb półpierwszych: $4 \cdot 9 \cdot 35$, $4 \cdot 15 \cdot 21$, $6 \cdot 10 \cdot 21$, $6 \cdot 6 \cdot 35$, $6 \cdot 14 \cdot 15$ oraz $9 \cdot 10 \cdot 14$.

<u>Schemat punktacji</u>:

Podpunkt a)
1 punkty – pełne rozwiązanie
Podanie poprawnej liczby liczb półpierwszych (6).

0 punktów
Brak odpowiedzi lub odpowiedź błędna.

Uwaga: Uczeń, który nie podał liczby liczb półpierwszych, ale poprawnie je wypisał, otrzymuje za podpunkt a) 1 punkt.

Podpunkt b)
1 punkty – pełne rozwiązanie
Podanie poprawnej liczby dzielników naturalnych (3 lub 4).

0 punktów
Brak odpowiedzi lub odpowiedź błędna.

Podpunkt c)
3 punkty – pełne rozwiązanie
Poprawne ocenienie prawdziwości trzech zdań.

2 punkty
Poprawne ocenienie prawdziwości dwóch z trzech zdań.

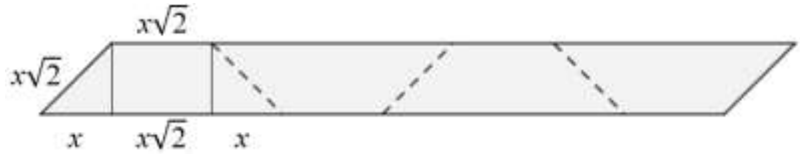
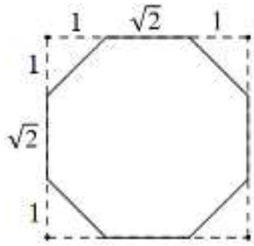
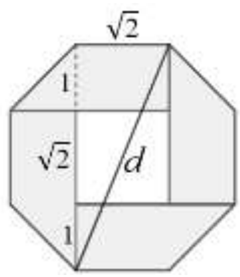
1 punkt
Poprawne ocenienie prawdziwości jednego z trzech zdań.

0 punktów
Prawdziwość trzech zdań oceniona niepoprawnie lub podanie odpowiedzi w sposób nieczytelny lub niejasny.

Podpunkt d)
3 punkty – pełne rozwiązanie
Poprawne zapisanie 6 różnych rozkładów liczby 1260 na czynniki półpierwsze i jednocześnie niepodanie żadnych błędnych rozkładów.</td></tr>
</table>

	2 punkty Poprawne zapisanie co najmniej 4 różnych rozkładów liczby 1260 na czynniki półpierwsze. **1 punkt** Poprawny sposób znalezienia co najmniej 1 rozkładu liczby 1260 na czynniki półpierwsze. Na przykład: Uczeń rozkłada 1260 na czynniki pierwsze, a następnie wymnaża trzy pary znalezionych czynników, tworząc liczby półpierwsze. **0 punktów** Brak odpowiedzi lub odpowiedź błędna. **Uwaga:** Uczeń, który w rozwiązaniu błędnie uznaje 1 za liczbę pierwszą, **zapisuje swoje rozumowanie** (na przykład wypisując liczby pierwsze, by łatwiej znaleźć liczby półpierwsze) i konsekwentnie rozwiązuje zadanie, bazując na tym błędzie, otrzymuje maksymalnie: • za podpunkt a) 1 punkt za odpowiedź: Jest 13 takich liczb. • za podpunkt b) 1 punkt za odpowiedź: Liczba półpierwsza ma 1, 2, 3 lub 4 dzielniki. • za podpunkt c) 3 punkty za odpowiedzi: FAŁSZ, FAŁSZ, FAŁSZ, • za podpunkt d) 0 punktów.

ZADANIE 16. **10p**

Poprawna odpowiedź	**Punktacja**
I. a) $135°$ I. b) $10x\sqrt{2} + 8x$ II. a) $4\sqrt{2} + 4$ II. b) $\sqrt{8+4\sqrt{2}}$	<u>**Przykładowe rozwiązanie:**</u> **I. a)** $90° + 45° = 135°$, odpowiedź: $135°$ **I. b)** Rysujemy równoległobok *ABCD* i zaznaczamy na nim miejsca zagięcia. Krótszy bok *AD* równoległoboku jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnej długości x, więc $\vert AD\vert = x\sqrt{2}$. Miejsca zagięcia dzielą pasek na cztery przystające trapezy równoramienne, których krótsza podstawa ma długość taką, jak bok ośmiokąta, czyli $x\sqrt{2}$, a dłuższa podstawa ma długość $x\sqrt{2} + 2x$.  Na bok *AB* równoległoboku *ABCD* składają się dwie krótsze i dwie dłuższe podstawy wspomnianych wyżej trapezów, co daje: $\vert AB\vert = 2(x\sqrt{2} + 2x) + 2\cdot x\sqrt{2} = 4x\sqrt{2} + 4x$ Stąd obwód równoległoboku *ABCD:* $2(4x\sqrt{2} + 4x) + 2x\sqrt{2} = 10x\sqrt{2} + 8x$ **II. a)** **I sposób** Korzystamy z rysunku pomocniczego i wyrażeń opisujących długości odcinków z części I zadania, stąd powierzchnię ośmiokąta foremnego dzielimy na cztery przystające trapezy prostokątne i kwadrat. Jeśli bok ośmiokąta ma długość $\sqrt{2}$, to $x = 1$. Pole jednego trapezu: $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}+1)\cdot 1}{2} = \frac{2\sqrt{2}+1}{2}$. Pole kwadratu: $(\sqrt{2})^2 = 2$ Obliczamy pole ośmiokąta foremnego: $2 + 4\cdot\frac{2\sqrt{2}+1}{2} = 4\sqrt{2} + 4$ **II sposób** Dopełniamy ośmiokąt foremny do kwadratu o boku $\sqrt{2} + 2$ (jak na rysunku obok). Od pola powierzchni takiego kwadratu odejmujemy pole dodanych trójkątów prostokątnych.  $(\sqrt{2}+2)^2 - 4\cdot\frac{1\cdot 1}{2} = 6 + 4\sqrt{2} - 2 = 4\sqrt{2} + 4$ **II. b)** Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i podstawiamy do równania długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym, w którym przeciwprostokątną jest najdłuższa przekątna d ośmiokąta foremnego:  $(\sqrt{2})^2 + (2+\sqrt{2})^2 = d^2$ Stąd po uproszczeniu lewej strony równania: $2 + 6 + 4\sqrt{2} = d^2$ $d = \sqrt{8+4\sqrt{2}}$

	<u>Schemat punktacji</u>: Podpunkt **I. a)** **1 punkty – pełne rozwiązanie** Podanie poprawnej miary kąta $\sphericalangle ADC$ (135°). **0 punktów** Brak odpowiedzi lub odpowiedź błędna. **Uwaga:** Uczeń, który w podpunkcie I. a) poda odpowiedź 135 bez symbolu stopnia, otrzymuje 1 punkt. Podpunkt **I. b)** **3 punkty – pełne rozwiązanie** Zapisanie w najprostszej postaci poprawnego wyrażenia algebraicznego przedstawiającego obwód równoległoboku *ABCD.* **2 punkty** Poprawny sposób znalezienia wyrażenia algebraicznego przedstawiającego obwód równoległoboku *ABCD.* Na przykład: Uczeń zapisuje długość odcinka *AB* jako sumę dwóch odcinków o długości takiej samej jak odcinek *AD* oraz dwóch dłuższych, o $2x$ dłuższych niż *AD*. Następnie sumuje dwukrotność wyrażenia przedstawiającego długość $\|AD\|$ i długość $\|AB\|$. **1 punkt** Poprawny sposób znalezienia wyrażenia algebraicznego przedstawiającego długość boku *AD* równoległoboku *ABCD.* Na przykład: Uczeń korzysta z poprawnego wzoru na przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym równoramiennym, by znaleźć $\|AD\|$; **lub** Uczeń korzysta z twierdzenia Pitagorasa, by znaleźć $\|AD\|$ i poprawnie zapisuje równanie $x^2+x^2 = \|AD\|^2$. **0 punktów** Brak istotnego postępu. Podpunkt **II. a)** **3 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie pola powierzchni ośmiokąta foremnego. **2 punkty** Poprawny sposób obliczenia pola powierzchni ośmiokąta foremnego. Na przykład: Uczeń poprawnie dzieli ośmiokąt foremny na mniejsze figury i stosuje odpowiednie wzory, by obliczyć ich pole, a następnie zsumować otrzymane wyniki; **lub** Uczeń znajduje wyrażenie przedstawiające pole ośmiokąta foremnego w zależności od x, a następnie podstawia do niego znalezioną wartość x. **1 punkt** Poprawny sposób obliczenia długości x. Na przykład: Uczeń korzysta z poprawnego wzoru na przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym równoramiennym i układa równanie $x\sqrt{2} = \sqrt{2}$; **lub** Uczeń korzysta z twierdzenia Pitagorasa, by znaleźć x i poprawnie zapisuje równanie $x^2+x^2 = \sqrt{2}^2$.

	0 punktów Brak istotnego postępu lub podanie odpowiedzi bez zapisania obliczeń. Podpunkt **II. b)** **3 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie długości najdłuższej przekątnej ośmiokąta foremnego. **2 punkty** Poprawny sposób obliczenia długości najdłuższej przekątnej ośmiokąta foremnego. Na przykład: Uczeń poprawnie korzysta z twierdzenia Pitagorasa, by znaleźć długość najdłuższej przekątnej ośmiokąta foremnego. **1 punkt** Poprawny sposób obliczenia długości dłuższej z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątną jest najdłuższa przekątna ośmiokąta foremnego. Na przykład: Uczeń rysuje trójkąt prostokątny o krótszej przyprostokątnej długości $\sqrt{2}$ oraz dłuższej przyprostokątnej długości $\sqrt{2}+2x$, gdzie za x wstawia wartość znalezioną w podpunkcie II. a). **0 punktów** Brak istotnego postępu lub podanie odpowiedzi bez zapisania obliczeń. **Uwaga:** Uczeń, który po poprawnym obliczeniu szukanej długości przekątnej przekształci wynik w sposób błędny, na przykład zapisze pierwiastek sumy jako sumę pierwiastków, może za podpunkt II. a) otrzymać co najwyżej 2 punkty.

ZADANIE 17. **8p**

Poprawna odpowiedź	**Punktacja**
a) 16 minut b) 2 m/s c) 24 kcal/min d) 186 kcal	(see below)

<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

a) Obliczamy czas, w którym sportowiec przebiegał sprintem 200m: $\frac{200\text{ m}}{8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 25\text{ s}$

Łączny czas trwania ćwiczenia: $12 \cdot 25\text{s} + 11\text{min} = 16\text{ min}$

b) Oznaczamy v jako prędkość truchtu i układamy równanie:

$$12 \cdot 200 + v \cdot 60 \cdot 11 = 3720$$
$$660v = 1320$$
$$v = 2$$

Średnia prędkość truchtu wynosiła 2 m/s (7,2 km/h).

c) Średnia prędkość sprintu sportowca jest czterokrotnie większa niż średnia prędkość jego truchtu, więc jeśli oznaczymy średnią liczbę kilokalorii spalanych w ciągu minuty sprintu jako x, średnia liczba kilokalorii spalanych w ciągu minuty truchtu to $0{,}25x$.
Układamy równanie:

$$5x + 11 \cdot 0{,}25x = 186$$
$$7{,}75x = 186$$
$$x = 24$$

Sportowiec spala średnio 24 kcal/min w trakcie biegu sprintem.

d) Przy średniej prędkości 4 m/s, czyli dwukrotnie mniejszej niż średnia prędkość sprintu, sportowiec spala dwukrotnie mniej kilokalorii niż przy sprincie, czyli średnio 12 kcal/min.
Obliczamy czas pokonania 3720 m ze średnią prędkością 4 m/s:
$\frac{3720\text{ m}}{4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 930\text{ s} = 15{,}5\text{ min}$
Obliczamy liczbę spalonych kilokalorii: $15{,}5\text{ min} \cdot 12\text{ kcal/min} = 186\text{ kcal}$

<u>Schemat punktacji</u>:

Podpunkt **a)**

2 punkty – pełne rozwiązanie
Obliczenie czasu trwania ćwiczenia i wyrażenie tej wielkości w minutach (16 min).

1 punkt
Poprawny sposób obliczenia czasu trwania ćwiczenia.

Na przykład:
Uczeń dzieli dystans pokonany szybkim biegiem przez prędkość biegu, a do otrzymanego wyniku dodaje czas biegu truchtem.

0 punktów
Brak istotnego postępu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń.

Uwaga:
- Podanie odpowiedzi w innej jednostce czasu niż minuta traktowane jest jak błąd rachunkowy.
- Jeżeli uczeń przyjmuje, że sportowiec robi 12 przerw na trucht, może za podpunkt a) otrzymać co najwyżej 1 punkt.

Podpunkt **b)**

2 punkty – pełne rozwiązanie
Obliczenie średniej prędkości truchtu.

	1 punkt Poprawny sposób obliczenia średniej prędkości truchtu. Na przykład: Uczeń układa poprawne równanie z niewiadomą oznaczającą szukaną prędkość; **lub** Uczeń oblicza dystans pokonany truchtem, następnie dzieli go przed czas truchtu. **0 punktów** Brak istotnego postępu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń. **Uwaga:** Uczeń może podać wynik w dowolnej jednostce prędkości. Brak podania jednostki przez ucznia jest traktowany jak błąd rachunkowy. Podpunkt **c)** **2 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie średniej liczby kilokalorii spalanych w ciągu minuty sprintu (24). **1 punkt** Poprawny sposób obliczenia średniej liczby kilokalorii spalanych w ciągu minuty sprintu. Na przykład: Uczeń zapisuje poprawne równanie z jedną niewiadomą, w którym przyrównuje 186 kcal do sumy kalorii spalonych podczas sprintu oraz kalorii spalonych podczas truchtu – obie te wielkości mają postać iloczynu czasu biegu i liczby kalorii spalanych na minutę tego biegu. **0 punktów** Brak istotnego postępu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń. Podpunkt **d)** **2 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie liczby kilokalorii, które spaliłby sportowiec przy zadanych warunkach (186). **1 punkt** Poprawny sposób obliczenia liczby kilokalorii, które spaliłby sportowiec przy zadanych warunkach. Na przykład: Uczeń znajduje czas pokonania 3720m ze średnią prędkością 4m/s oraz liczbę kalorii spalanych na minutę w trakcie biegu ze średnią prędkością 4m/s. Następnie mnoży otrzymane wyniki. **0 punktów** Brak istotnego postępu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń.