## SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

| Numer zadania | Liczba punktów za zadanie | Klucz odpowiedzi | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E |
| **1.** | 2 | | | **X** | | |
| **2.** | 2 | | | **X** | | |
| **3.** | 2 | | | | **X** | |
| **4.** | 2 | | | | **X** | |
| **5.** | 2 | | **X** | | | |
| **6.** | 2 | | | | **X** | |
| **7.** | 3 | | | **X** | | |
| **8.** | 3 | | | | | **X** |
| **9.** | 3 | **X** | | | | |
| **10.** | 3 | | | | **X** | |
| **11.** | 3 | **X** | | | | |
| **12.** | 3 | | **X** | | | |
| **13.** | 3 | **X** | | | | |

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania zamknięte: **32**

## SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

1. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie poprawnie alternatywnym sposobem, otrzymuje pełną liczbę punktów.

2. Jeśli uczeń popełnia błędy rachunkowe, ale **sposób** rozwiązania zadania jest w całości poprawny, rozwiązanie konsekwentnie doprowadzone do końca, a błąd nie powoduje znacznego uproszczenia zadania, to uczeń traci tylko 1 punkt za zadanie (bez względu na etap, na którym błąd został popełniony).

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania otwarte: **28**

**ZADANIE 14.** **8p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>a) I 3<br>II 8<br>III 5<br>b) Nie; uzasadnienie<br>c) $p = 0$, q = 1, $r = 2$</td><td>

<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

a) I 3 II 8 III 5

b) Taki trójkąt nie istnieje. Uzasadnienie:

Sposób I

Liczba $p$ jest parzysta, więc jej kwadrat jest parzysty. Liczba $q$ jest nieparzysta, więc jej kwadrat jest nieparzysty. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa w trójkącie prostokątnym długości boków $p$, $q$ i $r$ muszą spełniać równanie: $p^2 + q^2 = r^2$.

Suma liczb parzystej i nieparzystej jest nieparzysta, natomiast liczba $r$ i jej kwadrat są parzyste. Stąd, taki trójkąt nie istnieje.

Sposób II

Niech $q = p + 1$ oraz $r = p + 2$.

Jeśli taki trójkąt istnieje, to zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa:

$$p^2 + (p+1)^2 = (p+2)^2$$
$$p^2 + p^2 + 2p + 1 = p^2 + 4p + 4$$
$$p^2 = 2p + 3$$

Jeżeli $p$ jest liczbą parzystą, to lewa strona powyższego równania jest parzysta, prawa natomiast jest nieparzysta. Stąd, nie istnieje trójkąt spełniający warunki zadania.

c) Układamy równanie: $q^2 = p \cdot r + q$

Zapisujemy $q = p + 1$ oraz $r = p + 2$.

Zapisujemy równanie:

$$(p+1)^2 = p(p+2) + p + 1$$
$$p^2 + 2p + 1 = p^2 + 2p + p + 1$$
$$1 = p + 1$$
$$p = 0$$

0 jest liczbą całkowitą i parzystą, więc rozwiązaniem będzie $p = 0, q = 1, r = 2$.

<u>Schemat punktacji:</u>

Podpunkt a)

3 punkty

Podanie poprawnych odpowiedzi na trzy pytania.

2 punkty

Podanie poprawnych odpowiedzi na dwa z trzech pytań.

1 punkt

Podanie poprawnych odpowiedzi na jedno z trzech pytań.

0 punktów

Brak odpowiedzi lub podanie błędnych odpowiedzi na wszystkie pytania.

Podpunkt b)

2 punkty

Poprawne uzasadnienie, dlaczego trójkąt prostokątny o bokach $p$, $q$, $r$ nie istnieje.

</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | **1 punkt**<br>Poprawne odwołanie się do twierdzenia Pitagorasa.<br>Na przykład:<br>Uczeń zapisał $p^2 + q^2 = r^2$ lub $p^2 + (p+1)^2 = (p+2)^2$.<br><br>**0 punktów**<br>Błędna odpowiedź lub błędne rozumowanie.<br>Na przykład:<br>Uczeń wybrał trzy liczby spełniające warunki zadania i pokazał, że trójkąt o takiej długości boków nie jest prostokątny.<br><br>Podpunkt **c)**<br>**3 punkty – pełne rozwiązanie**<br>Poprawne obliczenie wartości liczb $p$, $q$ oraz $r$.<br><br>**2 punkty**<br>Poprawny sposób znalezienia jednej z wartości liczb $p$, $q$ lub $r$.<br>Na przykład:<br>Uczeń poprawnie przekształca wyrażenia $(p+1)^2$ oraz $p(p+2)$ i poprawnie rozwiązuje równanie metodą równań równoważnych.<br><br>**1 punkty**<br>Zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą.<br>Na przykład:<br>Uczeń zapisał $(p+1)^2 = p(p+2) + p + 1$.<br><br>**0 punktów**<br>Brak istotnego postępu lub podanie odpowiedzi bez zapisania obliczeń.<br><br>**Uwaga:**<br>• Uczeń, który w podpunkcie **a) I** zapisze dokładnie trzy liczby 234, 456, 678, otrzymuje za tę odpowiedź **1 punkt**.<br>• Uczeń, który w podpunkcie **a) II** zapisze 8, 9, 10, otrzymuje za tę odpowiedź **1 punkt**. |

**ZADANIE 15.** **10p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>

a) $\sqrt{3}an$<br>
b) $2a$<br>
c) dowód<br>
d) 105 ołówków

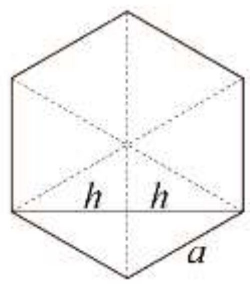
</td><td>

<u>**Przykładowe rozwiązanie:**</u>

a) Najdłuższe przekątne dzielą sześciokąt foremny na 6 trójkątów równobocznych o boku $a$. Poszukujemy przekątnej sześciokąta, składającej się z dwóch wysokości otrzymanych trójkątów równobocznych, stąd

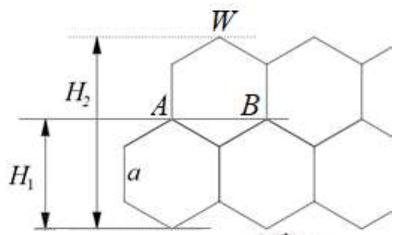
$$2h = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Otrzymaną długość mnożymy przez liczbę sześciokątów i otrzymujemy $na\sqrt{3}$.

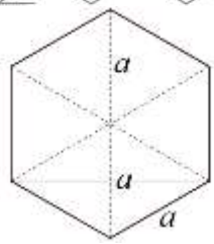



b) $2a$

c) Różnica długości $H_2$ i $H_1$ to odległość wierzchołka $W$ od krótszej przekątnej $AB$ sześciokąta (rysunek obok).




Dzielimy sześciokąt na 6 trójkątów równobocznych i zauważamy, że zaznaczona przekątna sześciokąta dzieli bok dwóch z trójkątów w połowie (rysunek obok).
Na szukaną odległość składa długość boku trójkąta $a$ oraz wspomniana wyżej długość połowy boku $a$.
Stąd, $H_2 - H_1 = a + 0{,}5a = 1{,}5a$




d) Korzystamy z wyrażenia opisującego długość $D$, by otrzymać maksymalną liczbę ołówków mieszczących się w jednym rzędzie.

$$70 \geq n \cdot 4\sqrt{3}$$

Przybliżamy $4\sqrt{3} \approx 6{,}92$ i dzielimy obie strony równania:

$$10{,}11 \ldots \geq n$$

Stąd otrzymujemy, że w jednym rzędzie możemy zmieścić co najwyżej 10 ołówków.
Zauważamy, że w co drugim rzędzie zmieści się jedynie 9 ołówków.
Bazując na podpunktach b) i c), zauważamy, że pierwszy rząd ołówków ma wysokość 8 mm, a każdy kolejny rząd to dodatkowe 6 mm. Obliczamy:
$(70 - 8) : 6 = 10{,}333 \ldots$, czyli zmieścimy 11 rzędów ołówków.
Obliczamy największą możliwą liczbę ołówków, jaka zmieści się do opakowania:
$6 \cdot 10 + 5 \cdot 9 = 105$

<u>**Schemat punktacji:**</u>

Podpunkt **a)**

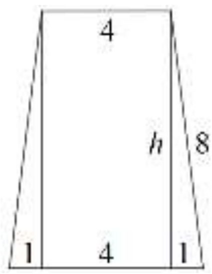
**2 punkty**
Podanie poprawnego wyrażenia przedstawiającego długość $D$.

**1 punkt**
Poprawny sposób znalezienia długości krótszej przekątnej sześciokąta foremnego
Na przykład:
Uczeń podwaja poprawne wyrażenie na wysokość trójkąta równobocznego o boku $a$.
**lub**
podanie długości krótszej przekątnej sześciokąta foremnego.

</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | **0 punktów**<br>Błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi.<br><br>Podpunkt **b)**<br>**1 punkt**<br>Podanie poprawnego wyrażenia na długość $H_1$.<br><br>**0 punktów**<br>Błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi.<br><br>Podpunkt **c)**<br>**2 punkty**<br>Poprawne wykazanie, że dodatnia różnica długości $H_2$ i $H_1$ wynosi $1{,}5a$.<br><br>**1 punkt**<br>Wykonanie podziału sześciokąta na trójkąty równoboczne i zauważenie, że krótsza przekątna sześciokątna dzieli bok dwóch z trójkątów w połowie.<br><br>**0 punktów**<br>Rozwiązanie bez istotnego postępu lub błędne rozumowanie.<br><br>Podpunkt **d)**<br>**5 punktów – pełne rozwiązanie**<br>Obliczenie największej liczby ołówków, jaka się zmieści do opakowania.<br><br>**4 punkty**<br>Poprawny sposób obliczenia największej liczby ołówków, jaka się zmieści do opakowania.<br><br>**3 punkty**<br>Poprawny sposób obliczenia liczby rzędów i największej możliwej liczby ołówków w jednym rzędzie i zauważenie, że w co drugim rzędzie zmieści się mniej ołówków.<br><br>**2 punkty**<br>Poprawny sposób obliczenia liczby rzędów i największej możliwej liczby ołówków w jednym rzędzie<br>**lub**<br>poprawny sposób obliczenia największej możliwej liczby ołówków w jednym rzędzie i zauważenie, że w co drugim rzędzie zmieści się mniej ołówków.<br><br>**1 punkt**<br>Poprawny sposób obliczenia liczby rzędów **lub** największej możliwej liczby ołówków w jednym rzędzie.<br>Na przykład:<br>Uczeń zapisuje nierówność: $70 \geq n \cdot 4\sqrt{3}$ (może być w formie równania).<br>**lub**<br>Uczeń oblicza długość krótszej przekątnej podstawy $4\sqrt{3} \approx 6{,}8$ [mm] i oblicza: 70 : 6,8.<br>**lub**<br>Uczeń oblicza długość dłuższej przekątnej podstawy 8 mm i oblicza, że każdy kolejny rząd ołówków to dodatkowe 6mm, a następnie oblicza: $(70 - 8) : 6$.<br><br>**0 punktów**<br>Brak rozwiązania lub rozwiązanie błędne lub podanie odpowiedzi (105) bez wykonania obliczeń. |

**ZADANIE 16.** **10p**

| Poprawna odpowiedź | Punktacja |
| --- | --- |
| a) $10\sqrt{3}$<br>b) $13\sqrt{3} + 6\sqrt{15} + 15\sqrt{7}$<br>c) Długość boku: $\frac{2p}{3}$.<br>Wzór na pole: $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$ | **<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>**<br>a) Znajdujemy $p = (5 + 7 + 8) : 2 = 10$ i obliczamy pole korzystając ze wzoru Herona:<br>$P = \sqrt{10 \cdot (10-5) \cdot (10-7) \cdot (10-8)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3}$<br><br>b) W celu obliczenia pola powierzchni całkowitej, obliczamy pola powierzchni kolejnych ścian.<br>Pole ścian *ABE* i *CDE* obliczamy przy pomocy wzoru na pole powierzchni trójkąta równobocznego:<br>$P_{ABE} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ oraz $P_{CDE} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.<br>Pole ścian *BCE* i *ADE* obliczamy przy pomocy wzoru Herona dla $p = \frac{4+6+8}{2} = 9$.<br>$P_{BCE} = P_{ADE} = \sqrt{9 \cdot (9-8) \cdot (9-6) \cdot (9-4)} = \sqrt{9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} = 3\sqrt{15}$<br><br>Aby obliczyć pole trapezu *ABCD,* musimy najpierw znaleźć jego wysokość *h*. Tworzymy trójkąt prostokątny z wysokości, ramienia i części dolnej podstawy trapezu i korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:<br><br><br>$h^2 + 1^2 = 8^2$<br>$h = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$<br>Pole trapezu wynosi: $P_{ABCD} = \frac{(4+6)\cdot 3\sqrt{7}}{2} = 15\sqrt{7}$<br>Sumujemy wyniki i otrzymujemy:<br>$P_c = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{15} + 3\sqrt{15} + 15\sqrt{7} = 13\sqrt{3} + 6\sqrt{15} + 15\sqrt{7}$<br><br>c) Długość boku w trójkącie równobocznym o obwodzie równym $2p$ to $\frac{2p}{3}$.<br>Podstawiamy $\frac{2p}{3}$ w miejsce długości boków *a*, *b* i *c* we wzorze Herona i otrzymujemy<br>$P_\Delta = \sqrt{p\left(p - \frac{2p}{3}\right)\left(p - \frac{2p}{3}\right)\left(p - \frac{2p}{3}\right)} = \sqrt{p \cdot \frac{p}{3} \cdot \frac{p}{3} \cdot \frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{p^4}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$<br>$P_\Delta = \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$<br><br>**<u>Schemat punktacji:</u>**<br>Podpunkt **a)**<br>**2 punkty**<br>Obliczenie pola trójkąta za pomocą wzoru Herona.<br><br>**1 punkt**<br>Poprawny sposób obliczenia pola trójkąta za pomocą wzoru Herona.<br>Na przykład:<br>Uczeń obliczył *p* i poprawnie podstawia do wzoru Herona wartość *p* i długości boków.<br><br>**0 punktów**<br>Brak rozwiązania lub rozwiązanie błędne lub podanie odpowiedzi ($10\sqrt{3}$) bez wykonania obliczeń. |

| | |
|---|---|
| | Podpunkt **b)**<br>**5 punktów – pełne rozwiązanie**<br>Obliczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa $(13\sqrt{3} + 6\sqrt{15} + 15\sqrt{7})$.<br><br>**Ocenianie trzech części rozwiązania**<br>Niżej wymienione części rozwiązania oceniane są niezależnie od siebie.<br>• **Trapez *ABCD***<br>**2 punkty**<br>Poprawny sposób obliczenia pola powierzchni trapezu.<br>Na przykład:<br>Uczeń podstawił znalezioną wysokość i długości podstaw do wzoru na pole trapezu.<br><br>**1 punkt**<br>Poprawny sposób obliczenia wysokości trapezu.<br>Na przykład:<br>Uczeń oznaczył wysokość trapezu jako $h$ i zapisał $h^2 + 1^2 = 8^2$.<br><br>• **Ściana *ABE* lub ściana *CDE***<br>**1 punkt**<br>Poprawny sposób obliczenia pola powierzchni ściany *ABE* lub ściany *CDE*.<br>Na przykład:<br>Uczeń podstawia długość boku trójkąta równobocznego do wzoru na jego pole.<br><br>• **Ściana *BCE* lub ściana *ADE***<br>**1 punkt**<br>Poprawny sposób obliczenia pola powierzchni ściany *BCE* lub ściany *ADE*.<br>Na przykład:<br>Uczeń obliczył $p$ i poprawnie podstawia do wzoru Herona wartość $p$ i długości boków.<br><br>**0 punktów**<br>Brak rozwiązania lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń.<br><br>Podpunkt **c)**<br>**3 punkty**<br>Zapisanie poprawnego wyrażenia na długość boku trójkąta **oraz** znalezienie poprawnego wzoru na pole trójkąta równobocznego o obwodzie $2p$.<br><br>**2 punkty**<br>Zapisanie poprawnego wyrażenia na długość boku trójkąta **oraz** poprawny sposób znalezienia wzoru na pole trójkąta równobocznego o obwodzie $2p$.<br>Na przykład:<br>Uczeń zapisał $a = \frac{2p}{3}$, a następnie podstawia $\frac{2p}{3}$ w miejsce $a$, $b$ i $c$ we wzorze Herona.<br><br>**1 punkt**<br>Zapisanie poprawnego wyrażenia na długość boku trójkąta o obwodzie $2p$.<br><br>**0 punktów**<br>Brak odpowiedzi.<br><br>**Uwaga:** Uczeń, który zapisał wyrażenie $a = \frac{2p}{3}$, które następnie poprawnie podstawił do wzoru na pole trójkąta równobocznego $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i otrzymał poprawny wzór w zależności od $p$, otrzymuje **3 punkty** za podpunkt c). |