SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Klucz odpowiedzi				
		A	B	C	D	E
1.	2				X	
2.	2			X		
3.	2				X	
4.	2			X		
5.	2				X	
6.	2		X			
7.	2	X				
8.	2		X			
9.	3				X	
10.	3					X
11.	3					X
12.	3		X			
13.	3				X	
14.	3					X

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania zamknięte: **34**

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

1. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie poprawnie alternatywnym sposobem, otrzymuje pełną liczbę punktów.

2. Jeśli uczeń popełnia błędy rachunkowe, ale **sposób** rozwiązania zadania jest w całości poprawny, rozwiązanie konsekwentnie doprowadzone do końca, a błąd nie powoduje znacznego uproszczenia zadania, to uczeń traci tylko 1 punkt za rozwiązanie zadanie (bez względu na etap, na którym błąd został popełniony).

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania otwarte: **26**

ZADANIE 15. **8p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>

a) 3,4,5,6,7,8,9, 10,11,12,13, 14,15,16

lub

liczby naturalne od 3 do 16

lub

liczba 3

b) 13

c) $\frac{11}{14}$ lub 1

</td><td>

<u>Sposób I rozwiązania zadania 15:</u>

Uwaga: W tym sposobie rozwiązania uczeń rozumie polecenie podpunktu **a)** jako konieczność wskazania liczb spełniających warunek **(i)**, jednak bez rozważania ograniczeń wynikających z warunku **(ii**) i na tym opiera również dalsze rozumowanie poprowadzone w podpunkcie **c).**

a) Przekształcamy najpierw liczbę $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$

$\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{\sqrt{37\cdot 3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} - 1 = \frac{\sqrt{111}}{3} - 1.$

Wykonujemy szacowanie $10 = \sqrt{100} < \sqrt{111} < \sqrt{121} = 11,$

zatem po podzieleniu obu stron przez 3 i odjęciu liczby 1 otrzymujemy:

$2\frac{1}{3} = \frac{10}{3} - 1 < \frac{\sqrt{111}}{3} - 1 < \frac{11}{3} - 1 = 2\frac{2}{3} < 3.$

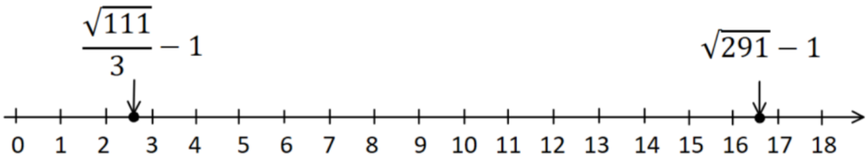
Szacujemy wartość różnicy $\sqrt{291} - 1$:

$17 = \sqrt{289} < \sqrt{291} < \sqrt{324} = 18$.

Zatem po odjęciu od obu stron 1 otrzymujemy

$16 < \sqrt{291} - 1 < 17$

Znajdujemy położenie obu liczb na osi liczbowej zgodne z powyższym szacowaniem:



Zatem szukane liczby naturalne to $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$.

b) Szacujemy liczbę $\sqrt[3]{32}$:

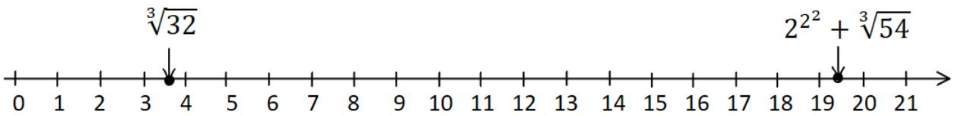
$$3 = \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{32} < \sqrt[3]{64} = 4$$

Szacujemy sumę $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$:

$2^{2^2} = 2^4 = 16$ oraz $3 = \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{54} < \sqrt[3]{64} = 4$ zatem

$$19 = 16 + 3 < 2^{2^2} + \sqrt[3]{54} < 16 + 4 = 20$$

Znajdujemy położenie obu liczb na osi liczbowej zgodnie z powyższym szacowaniem:



Liczby naturalne spełniające warunek **(ii)** to 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Jest zatem 13 liczb spełniających jednocześnie oba warunki **(i)** oraz **(ii).** Są to liczby: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

</td></tr>
</table>

c) Z rozwiązania podpunktu **a)** otrzymujemy, że istnieje 14 liczb naturalnych spełniających warunek **(i)**. Są to liczby $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$. Odrzucamy z nich liczby, które są kwadratami liczb naturalnych tzn. 4, 9,16. Zatem jest 11 liczb, które nie są kwadratami liczb naturalnych i spełniają warunek **(i)**. Szukane prawdopodobieństwo to $\frac{11}{14}$.

Schemat punktacji dot. sposobu I rozwiązania zadania 15:

a) **3 punkty- pełne rozwiązanie**
Poprawne wskazanie wszystkich liczb naturalnych spełniających warunek **(i)**.

2 punkty
Poprawny sposób oszacowania obu liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$ oraz $\sqrt{291} - 1$.

1 punkt
Poprawny sposób oszacowania tylko jednej z liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$, $\sqrt{291} - 1$.

0 punktów
Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez uzasadnienia.

b) **3 punkty- pełne rozwiązanie**
Poprawne wskazanie, ile jest liczb naturalnych spełniających jednocześnie warunek **(i)** i **(ii)**.

2 punkty
Poprawny sposób oszacowania obu liczb $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$.

1 punkt
Poprawny sposób oszacowania tylko jednej z liczb $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$.

0 punktów
Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez uzasadnienia.

Uwaga: Jeśli Uczeń rozwiązując podpunkt **a)** błędnie wskaże, ile jest liczb spełniających warunek **(i)**, ale na podstawie tej błędnej odpowiedzi poprawną metodą rozwiązuje podpunkt **b)**, to traci 1 punkt na etapie rozwiązania podpunktu **a)** i otrzymuje 3 punkty za rozwiązanie podpunktu **b)**.

c) **2 punkty- pełne rozwiązanie**
Poprawne obliczenie szukanego prawdopodobieństwa.

1 punkt
Poprawny sposób wyznaczenia liczby wszystkich liczb naturalnych spełniających warunek **(i)** oraz poprawny sposób wyznaczenia liczby tych spośród wyznaczonych liczb, które nie są kwadratami liczby naturalnej.

0 punktów
Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez poprawnego uzasadnienia.

Uwaga: Jeśli Uczeń rozwiązując podpunkt **a)** błędnie wskaże, ile jest liczb spełniających warunek **(i)**, ale na podstawie tej błędnej odpowiedzi poprawną metodą rozwiązuje podpunkt **c)** obliczając szukane prawdopodobieństwo, to traci 1 punkt na etapie rozwiązania podpunktu **a)** i otrzymuje 2 punkty za rozwiązanie podpunktu **c)**.

<u>Sposób II rozwiązania zadania 15:</u>

Uwaga: W tym sposobie rozwiązania zadania uczeń rozumie polecenie podpunktu **a)** jako konieczność wskazania liczb spełniających warunek **(i)** i jednocześnie nie spełniających warunku **(ii)**. Na tym założeniu opiera również dalsze rozumowanie poprowadzone w podpunktach **a)** i **c).** W rozwiązaniach podpunktów **a)** i **b)** uczeń prowadzi szacowania liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$,$\sqrt{291} - 1$, $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$ np. jak w I sposobie rozwiązania. Jako wynik końcowy podpunkcie **a)** uczeń otrzymuje liczbę 3 jako liczbę spełniającą warunek **(i)** i nie spełniającej warunku **(ii).**

W końcowym etapie rozwiązania podpunktu **b)** uczeń korzysta z otrzymanych szacowań liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$, $\sqrt{291} - 1$, $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$ i wskazuje liczby spełniające jednocześnie warunki **(i)** oraz **(ii).**

W podpunkcie **c)** uczeń otrzymuje, po skorzystaniu z poprawnie wyznaczonego wyniku podpunktu **a),** prawdopodobieństwo równe 1.

<u>Schemat punktacji sposobu II rozwiązania zadania 15:</u>

Schemat łącznej punktacji podpunktów a) i b)

6 punktów
Poprawne spełnienie obu warunków: wskazanie wszystkich liczb naturalnych spełniających warunek **(i)** i nie spełniających warunku **(ii)** oraz poprawne wskazanie, ile jest liczb naturalnych spełniających jednocześnie warunek **(i)** oraz **(ii)**.

5 punktów
Poprawne spełnienie jednego z dwóch warunków: wskazanie wszystkich liczb naturalnych spełniających warunek **(i)** i nie spełniających warunku **(ii)** albo poprawne wskazanie, ile jest liczb naturalnych spełniających jednocześnie warunek **(i)** oraz **(ii)**.

4 punkty

Poprawny sposób oszacowania czterech z czterech liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$, $\sqrt{291} - 1$, $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$.

3 punkty

Poprawny sposób oszacowania trzech z czterech liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$, $\sqrt{291} - 1$, $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$.

2 punkty

Poprawny sposób oszacowania dwóch z czterech liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$, $\sqrt{291} - 1$, $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$.

1 punkt

Poprawny sposób oszacowania jednej z czterech liczb $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$, $\sqrt{291} - 1$, $\sqrt[3]{32}$, $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$.

Schemat punktacji podpunktu c)

2 punkty- pełne rozwiązanie
Poprawne obliczenie szukanego prawdopodobieństwa.

	1 punkt Poprawny sposób wyznaczenia liczby wszystkich liczb naturalnych spełniających warunek **(i)** i nie spełniających warunku **(ii)** oraz poprawny sposób wyznaczenia liczby tych spośród wyznaczonych liczb, które nie są kwadratami liczby naturalnej. **0 punktów** Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez poprawnego uzasadnienia lub prawidłowej interpretacji wyniku otrzymanego w sposób merytorycznie poprawny w podpunkcie **a).** **<u>Uwaga:</u>** Jeśli Uczeń rozwiązując podpunkt **a)** błędnie wskaże, ile jest liczb spełniających warunek **(i)** i nie spełniających warunku **(ii)**, ale na podstawie tej błędnej odpowiedzi poprawną metodą rozwiązuje podpunkt **c)** obliczając szukane prawdopodobieństwo, to traci 1 punkt na etapie rozwiązania podpunktu **a)** i otrzymuje 2 punkty za rozwiązanie podpunktu **c).**

ZADANIE 16. **9p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>

a) $75°$
b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
c) $90°$
d) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

</td><td>

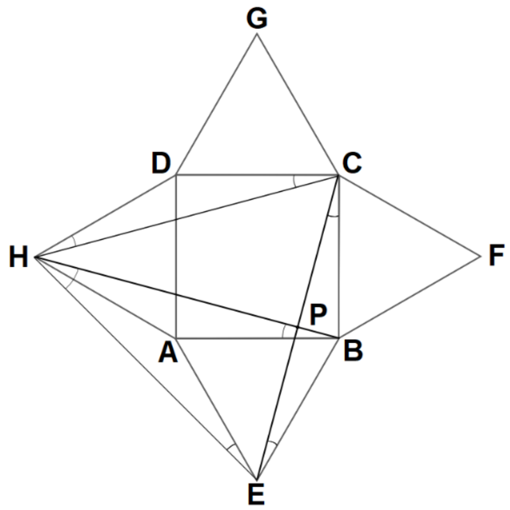
<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

a) Zauważmy, że trójkąt HDC jest równoramienny ($HD = DC$) i miara kąta HDC wynosi $60° + 90° = 150°$.
Wówczas miara kąta HCD jest równa $\frac{180°-150°}{2} = 15°$. Zatem miara kąta HCB jest równa $90° - 15° = 75°$.

b) Zauważmy, że $\Delta HDC \equiv \Delta HAB$ (bkb), gdyż $HD = DC = HA = AB = 1$ oraz miary kątów HDC i HAB są równe. Zatem ΔBHC jest równoramienny, jego podstawą jest bok $BC = 1$ cm a wysokość ma długość $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa $HC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

c) **<u>I sposób</u>**

Z wcześniejszego rozumowania wynika, że miara kąta CEB to 15°, a miara kąta EBH to 75°. Z sumy kątów w trójkącie EBP wynika, że kąt ma miarę 90°.



<u>II sposób</u>
Trójkąty $\Delta HDC \equiv \Delta EBC \equiv \Delta HAE$ (bkb), gdyż $HD = DC = HA = AE = AB = BE = BC = 1$, są to trójkąty równoramienne i miara kąta między ramionami w $\Delta HDC, \Delta EBC, \Delta HAB$ wynosi $90° + 60° = 150°$, zaś miara kąta $HAE = 360° - 2 \cdot 60° - 90° = 150°$.

Zatem ΔHCE jest równoboczny i ΔEBC jest równoramienny i mają wspólny bok EC, który jest podstawą w ΔEBC. Zatem wysokość w ΔEBC opuszczona z wierzchołka B na BC oraz wysokość w ΔHCE opuszczona z wierzchołka H na BC mają punkt wspólny P w połowie boku BC. Ponieważ PE jest wspólnym ramieniem kątów BPC i HPC, więc P leży na przekątnej HB, zatem kąt przecięcia przekątnych HB i EC jest równy $90°$.

</td></tr>
</table>

	d) Z przystawania trójkątów $\Delta HDC \equiv \Delta HAE$ (bkb), wynika, że pole czworokąta $EBCH$ jest równe polu sześciokąta $EBCDHA$. Zatem pole czworokąta $EBCH$ jest równe sumie pól kwadratu $ABCD$ oraz pól trójkątów równobocznych ABE i HAD. Zatem pole $EBCH$ $= 1^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **<u>Schemat punktacji</u>** **a) 2 punkty – pełne rozwiązanie** Poprawne obliczenie miary kąta HCB. **1 punkty** Zauważenie równoramienności trójkąta HDC i poprawny sposób obliczenia miary kąta HCD. **0 punktów** Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń lub uzasadnienia. **b) 3 punkty- pełne rozwiązanie** Poprawne obliczenie długości HC. **2 punkty** Zauważenie, że BHC jest równoramienny i poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości HC. **1 punkt** Zauważenie przystawania trójkątów HDC i HAB. **0 punktów** Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń. **c) 2 punkty- pełne rozwiązanie** Poprawne obliczenie miary kąta przecięcia się przekątnych. **1 punkty** Poprawny sposób obliczenia miary kąta CEB oraz miary kąta EBH. **0 punktów** Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń lub uzasadnienia. **d) 2 punkty- pełne rozwiązanie** Poprawne obliczenie pola czworokąta $EBCH$. **1 punkt** Zauważenie, że pole $EBHC$ jest sumą pól HDC, AEB i $ABCD$ ze względu na przystawanie trójkątów HAE i HDC. **0 punktów** Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń lub uzasadnienia.

ZADANIE 17. 9p

Poprawna odpowiedź	Punktacja
a) $81\frac{9}{11}\%$ lub $81,(81)\%$ lub $\frac{900}{11}\%$ **b)** I FAŁSZ II FAŁSZ III PRAWDA **c)** $\frac{2}{3}$ lub $0,(6)$	**Przykładowe rozwiązanie:** **a)** Do drugiego naczynia trafiło dokładnie 10 g metalu mocy władzy, które Czarodziej zmieszał ze 100 g metalu mocy mądrości. Zatem procentową zawartość masy metalu mocy władzy w drugim naczyniu, a tym samym w pierścieniu miłości, obliczamy z formuły: $$\frac{10\text{ g}}{110\text{ g}}\cdot 100\% = \frac{100}{11}\% = 9\frac{1}{11}\%.$$ Zauważmy, że tak samo oblicza się zawartość procentową masy metalu mocy władzy w trzecim naczyniu (w pierścieniu mądrości) po dodaniu do tego naczynia 10 g metalu mocy władzy, ze względu na analogię sytuacji. W pierwszym naczyniu pozostało 80 g metalu mocy władzy. Po dodaniu do niego 10 g mieszaniny z drugiego naczynia oraz 10 g mieszaniny z trzeciego naczynia, łączna masa mieszaniny w pierwszym naczyniu jest równa 100 g. Obliczam teraz zawartość masy metalu mocy władzy w 10 g mieszaniny z drugiego naczynia. $10\text{ g}\cdot 9\frac{1}{11}\% = 10\text{ g}\cdot\frac{100}{11}\cdot\frac{1}{100} = \frac{10}{11}\text{ g}$. W analogiczny sposób obliczamy zawartość masy metalu mocy władzy w 10 g pochodzących z mieszaniny trzeciego naczynia. Zatem w pierwszym naczyniu zawartość masy metalu mocy władzy wynosi $$80+\frac{10}{11}+\frac{10}{11}=\frac{880}{11}+\frac{10}{11}+\frac{10}{11}=\frac{900}{11}=81\frac{9}{11}\ [g].$$ Procentowa zawartość masy mocy władzy w pierwszym naczyniu po wlaniu do niego 20 g łącznie obu mieszanin jest zatem równa: $$\frac{\frac{900}{11}\text{ g}}{100\text{ g}}\cdot 100\% = \frac{900}{11}\cdot\frac{1}{100}\cdot 100\% = 81\frac{9}{11}\%$$ i jest to zarazem procentowa zawartość masy metalu mocy władzy w pierścieniu władzy. **b)** I FAŁSZ, II FAŁSZ, III PRAWDA **c)** Zauważmy, że każdy pierścień ma wagę 100 g. W rozwiązaniu korzystamy ze stężeń procentowych obliczonych w podpunkcie **a)** oraz z informacji uzyskanych w podpunkcie **b)**. **Wybór 1**. Czarodziej wybiera pierścień władzy. Zawartość metalu mocy władzy w tym pierścieniu to $81\frac{9}{11}$ g. W pierścieniu miłości masa metalu mocy miłości to $90\frac{10}{11}$ g, w pierścieniu mądrości nie ma metalu mocy miłości. Ponieważ $81\frac{9}{11} < 90\frac{10}{11}$, zatem wybór pierścienia władzy spełnia warunki zadania. **Wybór 2.** Czarodziej wybiera pierścień mądrości. Zawartość metalu mocy władzy w tym pierścieniu to $9\frac{1}{11}$ g. Cały metal mocy miłości czyli 100 g zawiera się tylko w pozostałych dwóch pierścieniach. Ponieważ $9\frac{1}{11} < 100$, więc wybór pierścienia mądrości również spełnia warunki zadania.

Wybór 3. Czarodziej wybiera pierścień miłości. Zawartość metalu mocy władzy w tym pierścieniu to $9\frac{1}{11}$ g . W pierścieniu mądrości nie ma metalu mocy miłości, natomiast w pierścieniu władzy masa metalu mocy miłości jest równa także $9\frac{1}{11}$ g (patrz podpunkt **b)** zdanie **III**). Ponieważ $9\frac{1}{11} = 9\ \frac{1}{11}$, zatem wybór pierścienia miłości nie jest sprzyjający.

Zatem szukane prawdopodobieństwo to $\frac{2}{3}$.

<u>Schemat punktacji</u>

a) **4 punkty – pełne rozwiązanie**
Poprawne obliczenie zawartości procentowej masy metalu mocy władzy w pierścieniu władzy lub w pierwszym naczyniu, po dodaniu do pierwszego naczynia po 10 g mieszanin odpowiednio z drugiego i z trzeciego naczynia.

3 punkty
Poprawny sposób obliczenia zawartości masy metalu mocy władzy w pierwszym naczyniu po dodaniu do niego 10 g mieszaniny z drugiego naczynia i 10 g mieszaniny z trzeciego naczynia.

2 punkty
Poprawny sposób obliczenia zawartości masy metalu mocy władzy w 10 g mieszaniny z trzeciego naczynia albo z drugiego naczynia, po dodaniu do niego 10 g metalu mocy władzy.

1 punkt
Poprawny sposób obliczenia zawartości procentowej masy metalu mocy władzy w jednym z naczyń: w drugim albo w trzecim, po dolaniu 10 g metalu mocy władzy.

0 punktów
Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń lub uzasadnienia.

b) **3 punkty- pełne rozwiązanie**
Poprawne ocenienie prawdziwości trzech zdań.

2 punkty
Poprawne ocenienie prawdziwości dwóch z trzech zdań.

1 punkt
Poprawne ocenienie prawdziwości jednego z trzech zdań.

0 punktów
Prawdziwość trzech zdań oceniona niepoprawnie lub podanie odpowiedzi w sposób nieczytelny lub niejasny.

c) **2 punkty- pełne rozwiązanie**
Poprawne obliczenie szukanego prawdopodobieństwa.

1 punkt
Poprawny sposób wskazania liczby wyborów pierścieni, w których masa metalu mocy władzy jest mniejsza, niż łączna masa metalu mocy miłości w pozostałych dwóch pierścieniach.

0 punktów
Brak istotnego postępu w zadaniu lub podanie odpowiedzi bez wykonania obliczeń lub uzasadnienia.

	<u>Uwaga:</u> Wynik liczbowy otrzymany w podpunkcie **c)** uznaje się za poprawny tylko wtedy, jeśli uczeń podaje bezpośrednio jego poprawnie uzasadnienie w tym podpunkcie lub jeśli uczeń poprawnie oblicza szukane prawdopodobieństwo powołując się w sposób niebudzący zastrzeżeń na wyniki otrzymane metodami poprawnymi merytorycznie w toku rozwiązywania podpunktów **a)** i **b)**.