KURATORIUM OŚWIATY
W KRAKOWIE

Kod ucznia

Miejsce na metryczkę ucznia

Małopolski Konkurs Matematyczny
dla uczniów szkół podstawowych województwa małopolskiego
Etap rejonowy
Rok szkolny 2022/2023

Drogi Uczniu !

1. Przed Tobą zestaw 17 zadań konkursowych, za które łącznie możesz uzyskać 60 punktów.
2. Na rozwiązanie zestawu masz **120 minut**. Komisja konkursowa 15 minut przed końcem przypomni Ci o upływającym czasie.
3. Nie używaj korektora ani żadnych przyborów zmazywalnych. Zadanie, w którym ich użyjesz, nie będzie oceniane.
4. Brudnopis nie podlega ocenie.
5. Nie podpisuj się imieniem i nazwiskiem, zakoduj pracę zgodnie z poleceniami Komisji Konkursowej.
6. Nie używaj kalkulatora.
7. Przekaż w depozyt członkom Komisji telefon komórkowy, jeśli go posiadasz przy sobie.
8. Staraj się, aby Twoja praca była czytelna. Pisz i rysuj wyraźnie, nie stosuj skrótów, zapisuj słowa w pełnym brzmieniu.
9. Stwierdzenie niesamodzielności pracy, korzystanie z kalkulatora lub przeszkadzanie innym spowoduje wykluczenie z udziału w konkursie.

Życzymy Ci satysfakcji z uczestnictwa w konkursie i powodzenia!

Organizatorzy Konkursu

Kod ucznia

Karta odpowiedzi

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Miejsce na odpowiedź					WYPEŁNIA KOMISJA
		A	B	C	D	E	Przyznane punkty
1.	2						
2.	2						
3.	2						
4.	2						
5.	2						
6.	2						
7.	2						
8.	2						
9.	3						
10.	3						
11.	3						
12.	3						
13.	3						
14.	3						
						Suma punktów za zadania zamknięte:	

Numer zadania	1. – 14.	15.	16.	17.	SUMA
Liczba punktów za zadanie	**34**	**8**	**9**	**9**	**60**
Uzyskane punkty					

Kody sprawdzających:

Informacje dla ucznia – zadania zamknięte

1. W zadaniach od **1.** do **8.** podane są 4 odpowiedzi: A, B, C, D. W zadaniach od **9.** do **14.** podanych jest 5 odpowiedzi: A, B, C, D, E. Wybierz **tylko jedną** odpowiedź i wpisz wyraźnie znak **X** w odpowiedniej kratce w tabeli na **karcie odpowiedzi**.
   Jeśli zaznaczysz błędną odpowiedź, otocz ją kółkiem i wpisz **X** w inną kratkę.
2. Pamiętaj o wypełnieniu karty odpowiedzi!
3. Ostatnie trzy strony tego arkusza są przeznaczone na brudnopis.

Zadanie 1. 2p

Karol napisał trzy listy do trzech różnych osób i zaadresował do tych osób trzy koperty. Do każdej koperty włożył jeden list, ale nie sprawdził, czy listy trafiły do właściwych kopert. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie dwa listy zostały włożone do właściwych kopert?

A. 1 **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 0

Zadanie 2. 2p

W pewnym stawie pływały 53 żabki, w tym tylko jedna samiczka. Wpuszczono do niego pewną liczbę samiczek i teraz samiczki stanowią *k*-tą część populacji żabek w tym stawie. Liczba *k* jest równa

A. 7 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 4

Zadanie 3. 2p

Ile przekątnych, które nie są ani przekątnymi ściany bocznej, ani przekątnymi podstawy, ma graniastosłup prawidłowy n-kątny?

A. $n(2n-1)$ **B.** $(2n-3)n$ **C.** $\frac{(2n-3)n}{2}$ **D.** $n(n-3)$

Zadanie 4. 2p

W pewnym lesie wśród drzew rosną sosny. W ciągu 30 lat z powodu zmian klimatycznych liczba wszystkich drzew zmniejszyła się o 20%, natomiast liczba sosen wzrosła z 50% do 65% całkowitej liczby drzew w tym lesie. Liczba sosen w tym lesie w stosunku do liczby sosen sprzed 30 lat

A. wzrosła o 15%. **B.** zmalała o 10%. **C.** wzrosła o 4%. **D.** zmalała o 6%.

Zadanie 5. **2p**

Ile jest równa reszta z dzielenia liczby $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ przez 11 ?

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

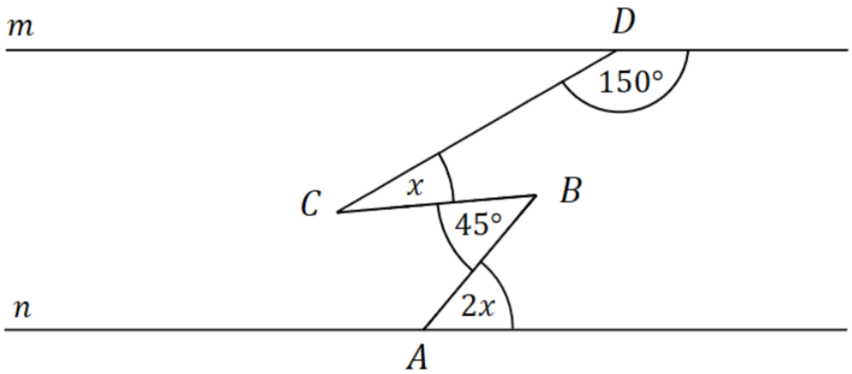
Zadanie 6. **2p**

W układzie współrzędnych dany jest sześciokąt foremny, którego kolejne wierzchołki oznaczono literami A, B, C, D, E, F. Znamy współrzędne dwóch jego wierzchołków: $A = (0, 0)$ i $E = (\sqrt{3}, 1)$ oraz współrzędne punktu $P = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, który jest punktem przecięcia dłuższych przekątnych tego sześciokąta. Iloczyn współrzędnych wierzchołka B tego sześciokąta wynosi

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\sqrt{3} - 1$ **D.** $1 - \sqrt{3}$

Zadanie 7. **2p**

Proste m i n są równoległe, punkt A leży na prostej n, punkt D leży na prostej m, natomiast dwa różne punkty B i C leżą pomiędzy prostymi m i n. Punkty A, B, C, D połączono odcinkami (patrz rysunek poniżej). Posługując się danymi z poniższego rysunku oblicz, ile jest równa wartość x.



A. 25° **B.** 30° **C.** 35° **D.** 40°

Zadanie 8. **2p**

Kolejne wierzchołki n-kąta foremnego, gdzie $n > 4$, oznaczono literami $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Ile wynosi miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A_4 w trójkącie $A_1A_4A_2$?

A. $\frac{90°}{n}$ **B.** $\frac{180°}{n}$ **C.** $\frac{270°}{n}$ **D.** $\frac{360°}{n}$

Zadanie 9. 3p

Wybierz zdanie prawdziwe.

A. Suma długości przekątnych każdego równoległoboku jest mniejsza od połowy jego obwodu.
B. Średnia arytmetyczna kwadratów długości przekątnych rombu o boku długości a, który nie jest kwadratem, jest równa polu kwadratu o boku długości a.
C. Jeśli przekątne czworokąta są równej długości, to jest on trapezem.
D. W siedmiokącie foremnym liczba przekątnych nie jest liczbą pierwszą.
E. Jeśli przekątne czworokąta przecinają się pod kątem prostym, to jest on równoległobokiem.

Zadanie 10. 3p

Kątem zewnętrznym wielokąta wypukłego nazywamy kąt przyległy do danego kąta wewnętrznego tego wielokąta. Dla każdego kąta wewnętrznego ustalamy jeden kąt zewnętrzny. Ile jest równa suma miar tak ustalonych kątów zewnętrznych w dziesięciokącie foremnym?

A. 60° **B.** 90° **C.** 180° **D.** 270° **E.** 360°

Zadanie 11. 3p

Na jednej osi liczbowej, na której przyjęto jednostkę równą 1 cm, Kasia, Basia i Ola zaznaczały punkty zgodnie ze zwrotem osi. Kasia zaznaczyła punkt o współrzędnej 0, a następne punkty zaznaczała co 9 cm. Basia także zaznaczyła punkt o współrzędnej 0, a kolejne punkty zaznaczała co 15 cm. Ola również zaznaczyła najpierw punkt o współrzędnej 0, a następne punkty zaznaczała co $10\sqrt{2}$ cm. Która z poniższych liczb jest współrzędną punktu, który został zaznaczony przez każdą z trzech dziewcząt w tym samym miejscu na osi i ma współrzędną dodatnią?

A. 45
B. $45\sqrt{2}$
C. $90\sqrt{2}$
D. $270\sqrt{2}$
E. Taki punkt nie istnieje.

Zadanie 12. 3p

W pewnym trapezie równoramiennym przekątne przecinają się pod kątem prostym. Jedna przekątna ma długość równą 10. Ile jest równe pole tego trapezu?

A. 25 **B.** 50 **C.** 100 **D.** 125 **E.** 150

Zadanie 13. 3p

Które trzy liczby mogą być długościami trzech wysokości w pewnym trójkącie?

A. $\frac{2}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}$ **B.** $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{12}$ **C.** $\frac{7}{6}, \frac{14}{15}, \frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{15}$ **E.** $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$

Zadanie 14. 3p

Obecnie Joasia jest dwa razy młodsza od Wioli oraz dwukrotnie starsza niż była wtedy, kiedy Arek miał tyle lat, ile Wiola ma teraz. Za cztery lata Joasia, Wiola i Arek będą mieli razem 100 lat. Ile lat ma obecnie Arek?

A. 24 **B.** 28 **C.** 32 **D.** 36 **E.** 40

Informacje dla ucznia – zadania otwarte

1. Rozwiązania i odpowiedzi do zadań otwartych od **15.** do **17.** zapisz czytelnie pod zadaniami w miejscu do tego przeznaczonym.
2. Wpisz swój kod ucznia w miejsca na górze stron 7, 9 i 11.
3. Pamiętaj o zapisaniu wszystkich obliczeń i odpowiedzi. Błędne obliczenia przekreślaj i zapisuj nowe.

Kod ucznia

Zadanie 15. **8p**

Rozważmy liczby naturalne spełniające następujące warunki:

(i) liczba leży na osi liczbowej między liczbą $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} - 1$ a liczbą $\sqrt{291} - 1$,

(ii) liczba jest większa od $\sqrt[3]{32}$ i jednocześnie mniejsza od $2^{2^2} + \sqrt[3]{54}$.

a) **(3p)** Wskaż wszystkie liczby naturalne spełniające tylko warunek **(i)**. Odpowiedź uzasadnij.

b) **(3p)** Ile jest liczb naturalnych spełniających jednocześnie warunek **(i)** i warunek **(ii)**? Odpowiedź uzasadnij.

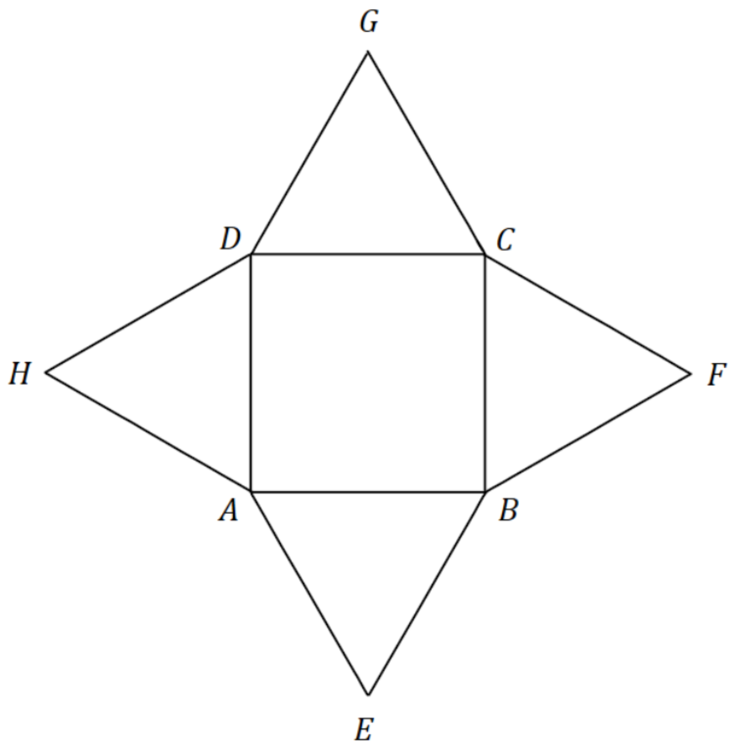
c) **(2p)** Spośród liczb naturalnych spełniających tylko warunek **(i)** losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie jest ona kwadratem liczby naturalnej?

Rozwiązanie:

Kod ucznia

Zadanie 16. **9p**

Na bokach kwadratu $ABCD$, którego bok ma długość 1, zbudowano trójkąty równoboczne AEB, BFC, CGD oraz DHA otrzymując w ten sposób ośmiokąt $AEBFCGDH$ (patrz rysunek).



a) **(2p)** Oblicz miarę kąta HCB.
b) **(3p)** Oblicz długość odcinka HC.
c) **(2p)** Oblicz kąt przecięcia odcinków HB i EC.
d) **(2p)** Wykaż, że pole czworokąta $EBCH$ jest równe polu sześciokąta $EBCDHA$ i oblicz jego wartość.

Rozwiązanie:

Kod ucznia

Zadanie 17. 9p

Za siedmioma lasami, za siedmioma rzekami na Górze Przeznaczenia stary Czarodziej w trzech naczyniach ma roztopione metale trzech różnych mocy: w pierwszym naczyniu 100 g metalu mocy władzy, w drugim 100 g metalu mocy miłości, a w trzecim 100 g metalu mocy mądrości. Czarodziej z pierwszego naczynia przelewa do drugiego i trzeciego po 10 g metalu mocy władzy i miesza dokładnie oddzielnymi łyżkami zawartości tych naczyń. Potem z drugiego i trzeciego naczynia Czarodziej odmierza po 10 g mieszanin i wlewa je do pierwszego naczynia i także miesza w nim dokładnie czystą łyżką. Na koniec Czarodziej tworzy przy użyciu trzech identycznych form:
- z całej zawartości pierwszego naczynia pierścień władzy,
- z całej zawartości drugiego naczynia pierścień miłości,
- z całej zawartości trzeciego naczynia pierścień mądrości.

W tej baśni warunki były idealne: łyżki i naczynia były cudownie odporne na wysoką temperaturę, a ich obecność nie wpłynęła na skład mieszanin, roztopione metale dokładnie się wymieszały w odpowiednich naczyniach i w całości spłynęły z łyżek do naczyń, masa składników mieszanin nie uległa zmianie podczas tworzenia pierścieni, Czarodziej nie uronił ani kropli na żadnym etapie i tak dalej, i tak dalej… A Ty, drogi Uczniu, rozwiń poniższe matematyczne wątki tej opowieści.

a) **(4p)** Oblicz procentową zawartość masy metalu mocy władzy w pierścieniu władzy.
b) **(3p)** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wpisz PRAWDA lub FAŁSZ w miejsce wyznaczone po prawej stronie zdań **I**, **II** i **III**.

I	W pierścieniu władzy masa metalu mocy mądrości jest większa niż masa metalu mocy władzy w pierścieniu mądrości.	..…………..…………
II	W pierścieniu mądrości masa metalu mocy władzy jest mniejsza niż masa metalu mocy miłości w pierścieniu władzy.	……………..………
III	W pierścieniu władzy masa metalu mocy miłości jest taka sama jak masa metalu mocy władzy w pierścieniu miłości.	……………..………

c) **(2p)** Wszystkie trzy pierścienie wyglądają identycznie. Czarodziej wybiera losowo jeden z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że masa metalu mocy władzy w wylosowanym pierścieniu jest mniejsza, niż łączna masa metalu mocy miłości w pozostałych dwóch pierścieniach?

Rozwiązanie:

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie <u>nie podlegają ocenie</u>.