SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Klucz odpowiedzi				
		A	B	C	D	E
1.	2			X		
2.	2				X	
3.	2			X		
4.	2		X			
5.	2				X	
6.	2		X			
7.	2		X			
8.	2	X				
9.	2			X		
10.	3				X	
11.	3					X
12.	3	X				
13.	3			X		
14.	3				X	
15.	3		X			

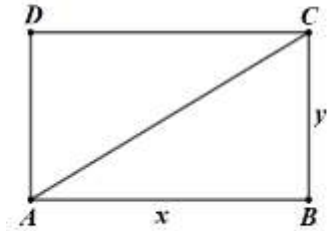
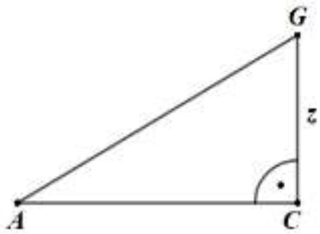
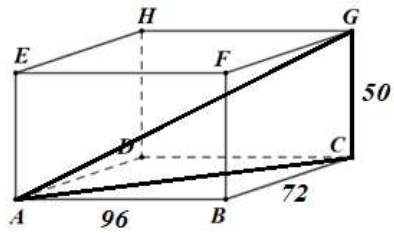
Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania zamknięte: **36**

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania otwarte: **24**

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Jeśli uczeń rozwiąże zadanie poprawnie alternatywnym sposobem, otrzymuje pełną liczbę punktów.

ZADANIE 16. **7p**

Poprawna odpowiedź	**Punktacja**
a) $\lvert AC\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ b) dowód c) 6 sekund	<u>**Przykładowe rozwiązanie:**</u>  a) AC jest przekątną podstawy prostopadłościanu, czyli przekątną prostokąta. Z twierdzenia Pitagorasa: $\lvert AC\rvert^2 = x^2 + y^2$. Stąd $\lvert AC\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$.  b) Z twierdzenia Pitagorasa: $\lvert AG\rvert^2 = \lvert AC\rvert^2 + z^2$. Jak zapisano w podpunkcie a), $\lvert AC\rvert^2 = x^2 + y^2$. Zapisujemy więc: $\lvert AG\rvert^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Stąd po spierwiastkowaniu obu stron równania, $\lvert AG\rvert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.  c) Z treści zadania: $x = 96$ m, $y = 72$ m, $z = 50$ m. Odległość w linii prostej od G do celu A to długość przekątnej AG. Podstawiamy do wzoru z podpunktu b): $\lvert AG\rvert = \sqrt{96^2+72^2+50^2} = \sqrt{16900} = 130$ [m]. Zapisujemy 130 m = 0,13 km i obliczamy czas przelotu odległości 0,13 km przy maksymalnej prędkości (78km/h): $t = \dfrac{0{,}13\text{ km}}{78\dfrac{\text{km}}{\text{h}}} = \dfrac{13\text{ h}}{7800} = \dfrac{1\text{ h}}{600} = 6$ sekund <u>**Schemat punktacji**</u>: Podpunkt **a)** **1 punkt – pełne rozwiązanie** Zapisanie poprawnego wzoru na $\lvert AC\rvert$. **0 punktów** Brak odpowiedzi lub odpowiedź błędna **lub** zapisanie $\lvert AC\rvert^2 = x^2 + y^2$ i poprzestanie na tym **lub** zapisanie wzoru $\lvert AC\rvert = \sqrt{x^2+y^2} = x + y$. Podpunkt **b)** **2 punkty – pełne rozwiązanie** Wykazanie, że $\lvert AG\rvert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

	1 punkt Zapisanie poprawnego wzoru na $\|AG\|^2$. **0 punktów** Brak istotnego postępu. Podpunkt **c)** **4 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie najkrótszego czasu przelotu z G do A w sekundach (co najmniej 6 sekund). **3 punkty** Poprawny sposób obliczenia najkrótszego czasu przelotu. **2 punkty** Poprawny sposób obliczenia odległości AG (130 m) **oraz** poprawny sposób zamiany jednostki prędkości (78km/h na 21,(6) m/s). **1 punkt** Poprawny sposób obliczenia odległości AG (130 m) **lub** poprawny sposób zamiany jednostki prędkości (78km/h na 21,(6) m/s). **0 punktów** Brak istotnego postępu **lub** podanie odpowiedzi (6 sekund) bez wykonania obliczeń.

ZADANIE 17. **7p**

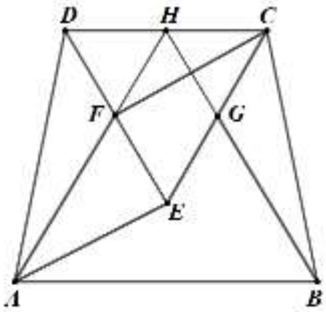
<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>

a) dowód

b) 13,(3)%

</td><td>

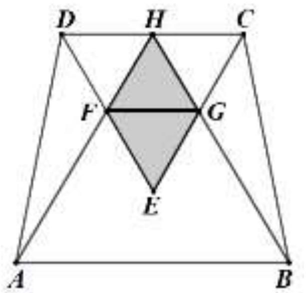
<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>



a) Jeśli czworokąt *AECF* jest równoległobokiem, to $|AE| = |CF|$ oraz $|EC| = |AF|$.
Trójkąt *CDE* jest równoboczny, stąd: $|EC| = |CD| = |AF|$.
$|FH| = |EG|$ - to boki rombu.
Podobnie $|FH| = |GC|$, ponieważ $FG \parallel CD$, a kąty *FHD* i *GCH* są odpowiadające.
Skoro $|EG| = |GC|$, to punkt *G* jest środkiem boku *EC*.
Stąd $|FH| = 0{,}5 \cdot |EC| = 0{,}5 \cdot |CD|$.
Otrzymujemy $|AB| = |AH| = |AF| + |FH| = |CD| + 0{,}5 \cdot |CD| = 1{,}5 \cdot |CD|$.

b) **Sposób I**
Dłuższa przekątna rombu jest wysokością trójkąta równobocznego *CDE*, obliczamy jej długość: $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.
Kąt *CED* ma miarę 60°, więc krótsza przekątna rombu dzieli go na dwa trójkąty równoboczne o wysokości $\sqrt{3}$.
Zgodnie ze wzorem na wysokość trójkąta równobocznego: $\sqrt{3} = \frac{|EF| \cdot \sqrt{3}}{2}$
Dostajemy $|EF| = 2$, więc krótsza przekątna rombu ma długość 2.
Pole zacieniowanego rombu wynosi więc $2\sqrt{3}$.
Wysokość trapezu *ABCD* jest równa wysokości trójkąta równobocznego o boku *AB*, czyli $3\sqrt{3}$.
Obliczamy pole trapezu: $\frac{(4+6)\cdot 3\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$.
$$\frac{\text{pole rombu}}{\text{pole trapezu}} \cdot 100\% = \frac{2\sqrt{3}}{15\sqrt{3}} \cdot 100\% = 13,(3)\%$$

Sposób II



Jeśli trapez *ABCD* jest równoramienny, a trójkąty *ABH* oraz *CDE* są równoboczne, to trójkąty *DFH* oraz *CHG* są równoboczne o boku długości 2.
Kąt *CED* ma miarę 60°, stąd wniosek, że zacieniowany romb składa się z dwóch trójkątów równobocznych o boku długości 2. Obliczamy sumę ich pól: $2\sqrt{3}$.
Dalsza część jak w sposobie I.

<u>Schemat punktacji:</u>

Podpunkt **a)**

3 punkty – pełne rozwiązanie
Wykazanie, że $|AB| = 1{,}5 \cdot |CD|$.

2 punkty
Stwierdzenie, że długość odcinka *AF* jest równa długości boku trójkąta *CDE* **oraz** wykazanie, że długość odcinka *FH* jest równa długości połowy boku trójkąta *CDE*.

</td></tr>
</table>

	1 punkt Stwierdzenie, że długość odcinka *AF* jest równa długości boku trójkąta *CDE* **lub** wykazanie, że długość odcinka *FH* jest równa długości połowy boku trójkąta *CDE*. **0 punktów** Brak istotnego postępu **lub** posługiwanie się wyłącznie konkretnymi wartościami długości boków trapezu **lub** przedstawienie rozwiązania opartego na założeniu prawdziwości tezy. Podpunkt **b)** **4 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie, że pole rombu stanowi 13,(3)% pola trapezu. **3 punkty** Poprawny sposób obliczenia pola rombu **i** pola trapezu (odpowiednio $2\sqrt{3}$ i $15\sqrt{3}$). **2 punkty** Poprawny sposób obliczenia pola rombu **lub** pola trapezu ($2\sqrt{3}$; $15\sqrt{3}$) **lub** poprawny sposób znalezienia długości co najmniej jednej z przekątnych rombu (2 ; $2\sqrt{3}$) **i** wysokości trapezu ($3\sqrt{3}$). **1 punkt** Poprawny sposób obliczenia długości co najmniej jednej z przekątnych rombu (2 ; $2\sqrt{3}$) **lub** wysokości trapezu ($3\sqrt{3}$) **lub** poprawny sposób obliczenia pola trójkąta równobocznego o boku 2 (sposób II; $\sqrt{3}$). **0 punktów** Brak istotnego postępu **lub** podanie odpowiedzi (13,(3)%) bez wykonania obliczeń.

ZADANIE 18. 10p

Poprawna odpowiedź	Punktacja
I. a) 112 i 994 I. b) $\frac{16}{225}$ II. a) 4 razy II. b) 272	<u>**Przykładowe rozwiązanie:**</u> I. a) Najmniejszą liczbą trzycyfrową jest 100. 100 : 14 = 7 r. 2. Stąd najmniejszą liczbą trzycyfrową podzielną przed 14 będzie $14 \cdot 8 = 112$. Największą liczbą trzycyfrową jest 999. 999 : 14 = 71 r. 5. Stąd największą liczbą trzycyfrową podzielną przez 14 będzie $14 \cdot 71 = 994$. I. b) Jest 7 liczb podzielnych przez 14 mniejszych niż 100, a 994 jest siedemdziesiątą pierwszą dodatnią liczbą naturalną podzielną przez 14. Losów wygrywających jest więc 71 – 7 = 64. Wszystkich liczb trzycyfrowych jest 999 – 99 = 900. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego: $\frac{64}{900} = \frac{16}{225}$. II. a) Wszystkich wykonanych losów było: 64 + 161 = 225. Ostateczne prawdopodobieństwo wygranej: $\frac{64}{225}$. Dzielimy, $\frac{64}{225} : \frac{16}{225} = 4$. II. b) Liczymy losy przegrywające mniejsze niż 112: od 100 do 111 jest 12 losów. 161 – 12 = 149 – liczba losów przegrywających większych niż 112. Między dwoma losami wygrywającymi jest kolejno 13 przegrywających. 149 : 13 = 11 r. 6, otrzymujemy więc 11 pełnych kolejnych „zestawów”: los wygrywający i 13 kolejnych przegrywających – razem 14 losów. $14 \cdot 11 = 154$ losów od 112 do 265. $112 + 14 \cdot 11 = 266$ podzielne przez 14 – los wygrywający. Zostało 6 losów przegrywających (reszta z dzielenia) kolejno od 267 do 272. 272 to największa liczba na losie przegrywającym. <u>**Schemat punktacji**</u>: **Cześć I** Podpunkt **a)** **2 punkty – pełne rozwiązanie** Podanie najmniejszej (112) i największej (994) liczby trzycyfrowej podzielnej przez 14. **1 punkt** Podanie jednej z szukanych liczb (112 albo 994). **0 punktów** Odpowiedź błędna lub brak odpowiedzi. Podpunkt **b)** **2 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie prawdopodobieństwa wygranej ($\frac{16}{225}$ lub inna liczba równa temu ułamkowi). **1 punkt** Obliczenie liczby losów wygrywających (64) **lub** obliczenie, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych (900) **lub** poprawny sposób obliczenia liczby losów wygrywających **oraz** liczby wszystkich losów.

	0 punktów Brak istotnego postępu **lub** podanie odpowiedzi $\left(\frac{16}{225}\right)$ bez wykonania obliczeń. …………………………………………………………………………………………… **Część II** Podpunkt **a)** **2 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie, że prawdopodobieństwo wygranej wzrosło czterokrotnie. **1 punkt** Obliczenie nowego prawdopodobieństwa wygranej $\left(\frac{64}{225}\right)$ i poprzestanie na tym **lub** poprawny sposób obliczenia, ile razy wzrosło prawdopodobieństwo wygranej. **0 punktów** Błędne obliczenia **lub** podanie odpowiedzi (4 razy) bez wykonania obliczeń. Podpunkt **b)** **4 punkty – pełne rozwiązanie** Obliczenie największej z liczb na wykonanych losach przegrywających (272). **3 punkty** Poprawny sposób znalezienia największej liczby podzielnej przez 14 mniejszej niż szukana liczba (266) **lub** poprawny sposób obliczenia liczby losów od pierwszego losu wygrywającego (112) wzwyż (160 losów). **2 punkty** Poprawny sposób obliczenia liczby grup po 13 kolejnych wykonanych losów przegrywających (149:13 = 11 r.6) **lub** poprawny sposób obliczenia liczby losów wygrywających z liczbą mniejszą niż szukana liczba (12). **1 punkt** Poprawny sposób obliczenia liczby losów przegrywających z liczbą trzycyfrową większą niż najmniejsza liczba na losie wygrywającym (149) **lub** podanie liczby losów przegrywających z liczbą mniejszą niż najmniejsza liczba na losie wygrywającym (12) **lub** zauważenie, że pomiędzy dwoma kolejnymi liczbami podzielnymi przez 14 jest 13 liczb niepodzielnych przez 14. **0 punktów** Błędne rozumowanie lub brak istotnego postępu **lub** podanie odpowiedzi (272) bez wykonania obliczeń. **UWAGA:** Jeśli w rozwiązaniach kolejnych podpunktów uczeń bazuje na swoich wcześniejszych błędnych odpowiedziach, tj. • w podpunkcie I.b) na odpowiedzi z podpunktu I.a), • w podpunkcie II.a) na odpowiedzi z podpunktu I.b), • w podpunkcie II.b) na odpowiedzi z podpunktu I.a), to za poprawny **sposób** pełnego rozwiązania dalszych części zadania otrzymuje całość punktów możliwych do zdobycia w dalszych podpunktach.