MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY

Rok szkolny 2017/2018

ETAP REJONOWY - rozwiązania

PRAWIDŁOWE ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

zadanie	odpowiedź	punkty
1	E	2
2	A	2
3	A	2
4	E	2
5	D	2
6	C	2
7	D	2
8	C	2
9		4
10		4
11	zadania otwarte	4
12		6
13		6
maksymalna możliwa łączna liczba punktów		**40**

Szanowni Państwo,

w arkuszu konkursowym etapu rejonowego Małopolskiego Konkursu Matematycznego dla uczniów klas gimnazjalnych w zadaniu nr 9 wystąpił błąd. Z uwagi na fakt, że dane zawarte w zadaniu nie pozwalały na jego rozwiązanie, zostało ono anulowane. Równocześnie podjęto decyzję, aby każdemu z uczestników konkursu za zadanie 9 przyznać maksymalną liczbę punktów, tj. 4 punkty.

W arkuszu konkursowym i kluczu zamieszczonym w zakładce konkursu usunięto błąd i podano właściwą liczbę punktów możliwych do zdobycia.

Przepraszamy za zaistniałą sytuację.

Katarzyna Dębska
Przewodnicząca Komisji Wojewódzkiej
Małopolskiego Konkursu Matematycznego

Rozwiązanie zadania 9.

Udowodnij, że liczba $\dfrac{7^1+7^2+7^3+\ldots+7^{400}}{400}$ jest liczbą naturalną.

Licznik można pogrupować łącząc 4 kolejne liczby (400 jest podzielne przez 4), a następnie wyłączyć przed nawias potęgę liczby 7:

$(7^1+7^2+7^3+7^4)+(7^5+\ldots+7^8)+\ldots+(\ldots+7^{400}) =$

$= 7^1(1+7+49+343)+7^5(1+7+49+343)+\ldots+7^{397}(1+7+49+343) =$

$= 400(7^1+7^5+\ldots+7^{397})$, zatem licznik jest liczbą podzielną przez 400.

Oznacza to, że po skróceniu ułamka uzyskamy liczbę naturalną.

Punktacja zadania 9.

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt - został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, lub w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki
Przykłady:

- uczeń pogrupował wyrazy w liczniku (np. parami lub czwórkami - liczba będąca dzielnikiem 400) wyłączając z nich przed nawias potęgę liczby 7

2 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń pogrupował liczby parami i wyłączając przed nawias wykazał podzielność przez 8 (lub przez 50)
- uczeń pogrupował czwórkami i zapisał licznik w postaci iloczynu

3 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale rozwiązanie zadania zawiera błędy, usterki
Przykłady:

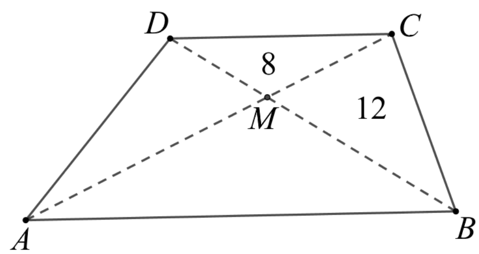
- uczeń grupując parami dalszym grupowaniem (kolejne pary) próbował pokazać podzielność przez 400, ale rozumowanie zawiera usterki rachunkowe
- uczeń w pełnym rozwiązaniu pomylił się w wykładnikach potęg 7 (np. zamiast 7^{397} wstawił 7^{396})

4 pkt - zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie
Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 10.

Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie M. Pola trójkątów BCM i CDM wynoszą odpowiednio 12 i 8. Oblicz pole trapezu.



Trójkąty CDB i CDA mają wspólną podstawę CD i jednakową wysokość (równą wysokości trapezu), więc ich pola są równe. Zatem (odejmując pole trójkąta CDM) uzyskujemy równość $P_{ADM} = P_{BCM} = 12$.

Trójkąty CDM i CBM mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C, a ich podstawy to odpowiednio DM i BM. Zatem $\frac{DM}{BM} = \frac{P_{CDM}}{P_{CBM}} = \frac{8}{12}$.

Analogicznie trójkąty ADM i ABM mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A, więc $\frac{P_{ADM}}{P_{ABM}} = \frac{DM}{BM} = \frac{8}{12}$.

Podstawiając $P_{ADM} = 12$ uzyskujemy $P_{ABM} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18$.

Sumując pola trójkątów mamy $P_{ABCD} = 50$.

Pole trójkąta ABM można też obliczyć zauważając, że trójkąty ABM i CDM są podobne w skali 3 : 2.

Punktacja zadania 10.

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt - został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki
Przykłady:

- uczeń zauważył, że trójkąty *CDB* i *CDA* (lub *ABC* i *ABD*) mają równe pola
- uczeń zauważył, że trójkąty *ABM* i *CDM* są podobne w skali *BM* : *DM*
- uczeń zauważył, że $P_{ADM} = 12$

2 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń zapisał odpowiednią proporcję pól, pozwalającą wyliczyć P_{ABM}
- uczeń wykazał, że *BM* : *DM* = 12 : 8

3 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.)
Przykłady:

- uczeń obliczył pole trójkąta *ABM*.

4 pkt - zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie
Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 11.

Odlewnik chce uzyskać stop metali A i B, w którym proporcja mas tych metali będzie wynosić 3 : 5. Dysponuje dwoma stopami metali A i B - w pierwszym metal A stanowi 40%, a w drugim 30%. W jakiej proporcji powinien dobrać do przetopienia te stopy?

Oznaczmy przez x masę stopu, w którym metal A stanowi 40%, przez y masę stopu, w którym metal A stanowi 30%.

W nowym stopie ilość metalu A będzie stanowić $\frac{4}{10}x+\frac{3}{10}y$.

Ilość metalu B to $\frac{6}{10}x+\frac{7}{10}y$.

Wykorzystując proporcję między masami metali A i B uzyskujemy równanie:

$$\frac{\frac{4}{10}x+\frac{3}{10}y}{\frac{6}{10}x+\frac{7}{10}y}=\frac{3}{5},$$

po przeliczeniu $x=3y$, czyli $\frac{x}{y}=3$.

Stopy należy więc dobrać w proporcji 3 : 1.

Punktacja zadania 11.

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt - został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki
Przykłady:

- uczeń zapisał odpowiednim wyrażeniem wykorzystując zawartości metali w obu stopach ilość metalu A i/lub metalu B

2 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń zapisał równanie lub układ równań pozwalające obliczyć poszukiwaną proporcję

3 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, brak poprawnej odpowiedzi itp.)
Przykłady:

- uczeń obliczając proporcję popełnił błąd rachunkowy
- uczeń poprawnie doprowadził obliczenia do końca, ale nie podał odpowiedzi, w jakiej proporcji należy zmieszać stopy

4 pkt - zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie
Uwagi:

- jeżeli uczeń rozumował poprawnie i doszedł w rachunkach do poprawnej proporcji, ale w odpowiedzi podał 1 : 3 zamiast 3 : 1 - uczeń otrzymuje pełną liczbę punktów
- jeżeli uczeń podał poprawny stosunek stopów i uzasadnił, że taki dobór spełnia warunki zadania - uczeń otrzymuje pełną liczbę punktów
- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 12

Na czarodziejskiej polanie rośnie 15 białych i 10 czerwonych kwiatków. Kwiatki wolno zrywać tylko parami (dwa kwiatki równocześnie). Jeśli zerwiemy dwa kwiatki tego samego koloru, na polanie natychmiast wyrasta jeden nowy biały kwiatek. Jeśli natomiast zerwiemy dwa kwiatki różnych kolorów, na polanie natychmiast wyrastają trzy nowe czerwone kwiatki.

a) Czy można doprowadzić do sytuacji, że na polanie będzie tylko jeden kwiatek, i będzie on koloru białego?

b) Czy można doprowadzić do sytuacji, że na polanie będzie tylko jeden kwiatek, i będzie on koloru czerwonego?

c) Czy można doprowadzić do sytuacji, że na polanie będzie dokładnie 30 kwiatków - wszystkie koloru czerwonego?

Jeśli odpowiedź jest twierdząca, wystarczy wskazać sposób postępowania prowadzącego do uzyskania opisanej sytuacji. Jeśli danego układu kwiatków nie da się uzyskać, należy to uzasadnić przeprowadzając odpowiednie rozumowanie.

a) Jeden biały kwiatek można uzyskać - możemy najpierw pięciokrotnie zerwać po 2 czerwone kwiatki - w efekcie za każdym razem przybędzie biały kwiatek - będzie więc 20 białych i 0 czerwonych. Następnie 19 razy zrywamy dwa białe kwiatki - za każdym razem ubywają dwa białe i przybywa jeden - czyli liczba białych w każdym ruchu maleje o 1, a czerwonych ciągle nie ma. Na koniec zostanie jeden biały kwiatek.

b) Liczba czerwonych kwiatków na początku jest parzysta (10). Przeanalizujmy, jak może się zmienić.

Mamy możliwe 3 ruchy:

- przy zerwaniu dwóch białych liczba czerwonych się nie zmieni (wyrasta biały)
- przy zerwaniu dwóch czerwonych liczba czerwonych maleje o 2 (wyrasta biały)
- przy zerwaniu białego i czerwonego liczba czerwonych wzrasta o 2 (jeden zrywamy, 3 wyrastają)

Za każdym razem zatem liczba czerwonych zmienia się o liczbę parzystą (0 też jest parzyste), zawsze pozostanie więc parzysta - nigdy nie może więc przyjąć wartości 1. Niemożliwe jest zatem uzyskanie jednego czerwonego kwiatka.

c) Można uzyskać 30 czerwonych kwiatków. Możemy np. najpierw 5 razy zerwać dwa białe kwiaty - za każdym razem liczba białych zmaleje o 1 - czyli będzie 10 białych i 10 czerwonych. Następnie możemy 10 razy zerwać biały i czerwony - w efekcie każdego ruchu ubędzie 1 biały, a przybędą 2 czerwone - na koniec nie będzie więc żadnego białego kwiatu, a liczba czerwonych wzrośnie do 30.

Punktacja zadania 12

W podpunktach **a**), **c**):
0 pkt - rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu

- w szczególności rozwiązania sprowadzające się tylko do podania odpowiedzi, że da się doprowadzić do takiej sytuacji, nie zawierające uzasadnienia

1 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe itp.)
Przykłady:

- uczeń w rozumowaniu podobnym do zamieszczonego dla a) zamiast „19 razy zrywamy dwa białe kwiatki” poda, że zrywamy je 20 razy

2 pkt - podanie poprawnego rozwiązania

- uczeń nie musi podać najszybszej metody uzyskania potrzebnej konfiguracji
- uczeń nie musi szczegółowo określić liczby kroków, wystarczy np. że w rozwiązaniu podobnym do zamieszczonego dla a) napisze „zrywamy po dwa białe kwiatki aż do...”

W podpunkcie **b**):
0 pkt - rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu

- w szczególności rozwiązania sprowadzające się tylko do podania odpowiedzi, że nie da się doprowadzić do takiej sytuacji, nie zawierające uzasadnienia
- rozumowanie na przykładach, w których nie udało się uzyskać pożądanej konfiguracji

1 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń zauważył, że liczba czerwonych kwiatków zawsze zmienia się o liczbę parzystą (o 0 lub 2)

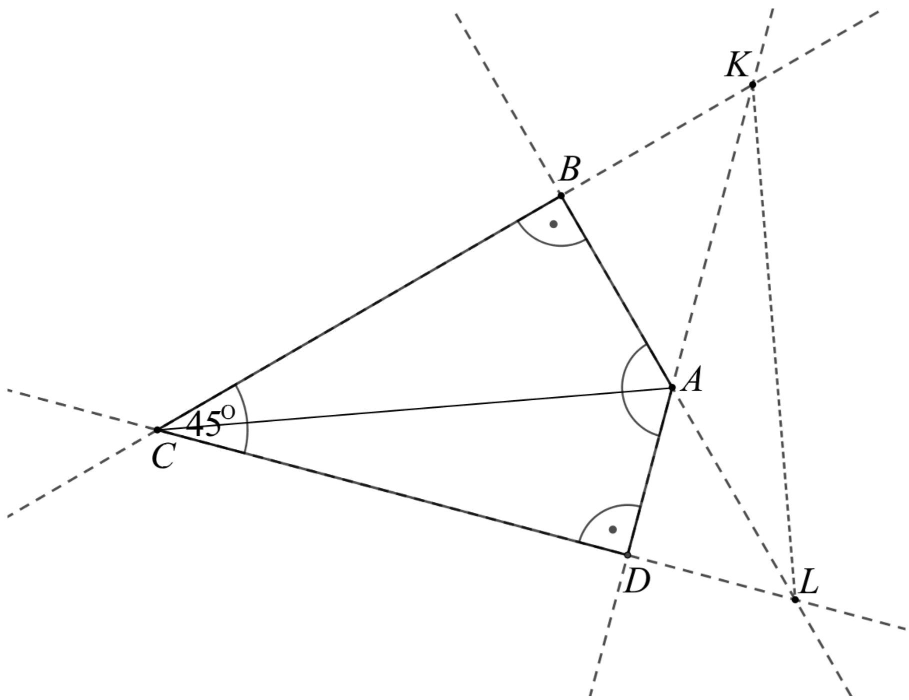
2 pkt - podanie poprawnego rozwiązania

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 13

Odcinek AC jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku C ma miarę $45°$. Boki AB i BC mają długości odpowiednio 3 i $2\sqrt{10}$. Proste AD i BC przecinają się w punkcie K, zaś proste AB i CD w punkcie L. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz długość odcinka KL. Pamiętaj o podaniu uzasadnień.



Zauważmy, że AC jest średnicą okręgu opisanego na trójkątach ABC i ACD - czyli kąty przy wierzchołkach B i D muszą być kątami prostymi.
Trójkąt CBL jest trójkątem prostokątnym z kątem $45°$, czyli jest trójkątem równoramiennym. Zatem $BL = BC = 2\sqrt{10}$.
Trójkąt CDK analogicznie też jest równoramienny prostokątny, więc $\angle CKD = \angle BKA = 45°$.
Zatem również trójkąt AKB jest równoramienny prostokątny, czyli $BK = AB = 3$.
Z twierdzenia Pitagorasa $KL^2 = BK^2 + BL^2 = 9 + 40 = 49$, czyli $KL = 7$.
Można też zauważyć, że trójkąty ABC i KBL są przystające, więc $KL = AC$.

Punktacja zadania 13

0 pkt - rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń wykonał poprawny rysunek (czworokąt *ABCD*, zaznaczony właściwy kąt $45°$)

2 pkt - został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania

- uczeń zauważył, że z faktu, iż *AC* jest średnicą wynika, że kąty przy wierzchołkach *B* i *D* są proste; te punkty uczeń otrzymuje nawet, jeśli nie określił poprawnie położenia punktów *K* i *L*

3 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń zauważył, że przynajmniej jeden z trójkątów w zadaniu jest trójkątem prostokątnym równoramiennym

4 pkt - zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń wyznaczył długości odcinków *BK* i *BL*
- uczeń uzasadnił, że trójkąty *ABC* i *KBL* są przystające

5 pkt - zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia *KL* lub *AC* (np. twierdzenie Pitagorasa)

6 pkt - zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie
Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów