KURATORIUM OŚWIATY W KRAKOWIE

MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów dotychczasowych gimnazjów
i klas dotychczasowych gimnazjów
prowadzonych w szkołach innego typu
województwa małopolskiego
Rok szkolny 2017/2018
ETAP REJONOWY — 19 stycznia 2018 roku

1. Przed Tobą zestaw **13** zadań konkursowych.
2. Na ich rozwiązanie masz **120** minut. Dziesięć minut przed upływem tego czasu zostaniesz o tym poinformowany przez członka Komisji Konkursowej.
3. Za bezbłędne rozwiązanie wszystkich zadań możesz uzyskać **40** punktów. W każdym zadaniu zamkniętym spośród 5 proponowanych odpowiedzi tylko jedna jest poprawna.
4. Za poprawne rozwiązanie każdego z zadań od **1** do **8** otrzymasz **2** punkty. Za poprawne rozwiązanie każdego z zadań od **9** do **13** otrzymasz podaną przy zadaniu liczbę punktów (od **4** do **6**).
5. Odpowiedzi do zadań od **1** do **8** zaznacz symbolem $\times$ w tabeli odpowiedzi, która znajduje się na końcu arkusza. <u>Tylko odpowiedzi zaznaczone w tabeli będą oceniane</u>. Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz symbolem $\times$ inną odpowiedź. Brak wyboru odpowiedzi będzie traktowany jako błędna odpowiedź.
6. W zadaniach od **9** do **13** przedstaw <u>pełne rozwiązania</u>, zapisując je w odpowiednim miejscu arkusza pod treścią zadania. <u>Pamiętaj o zapisaniu potrzebnych obliczeń, komentarzy, wyjaśnień, uzasadnień, odpowiedzi</u>. Oceniana jest całość rozumowania zamieszczonego w czystopisie.
7. Pisz długopisem lub piórem, nie używaj korektora ani wymazywalnych przyborów piśmienniczych. Użycie ołówka dozwolone jest wyłącznie do sporządzania rysunków. Odpowiednio oznaczone strony z arkusza możesz poświęcić na brudnopis. Brudnopis nie podlega ocenie.
8. Podczas pracy nie możesz korzystać z kalkulatora i żadnych innych dodatkowych pomocy, z wyjątkiem podstawowych przyborów geometrycznych.
9. Przekaż wyłączony telefon komórkowy Komisji (jeśli go posiadasz).
10. Stwierdzenie niesamodzielności pracy lub przeszkadzanie innym spowoduje wykluczenie z udziału w Konkursie.

Zadanie 1. (2 punkty)

Ile jest liczb czterocyfrowych, w których iloczyn cyfr wynosi 18?

A. 15; **B.** 21; **C.** 13; **D.** 27; **E.** 36.

Zadanie 2. (2 punkty)

W okrąg wpisano trójkąt ABC. Wierzchołki trójkąta rozdzieliły obwód okręgu na trzy łuki o długościach 2, 3 oraz 4. Wynika z tego, że

A. najmniejszy z kątów trójkąta ma miarę $40°$;
B. jeden z boków trójkąta jest dłuższy od 3;
C. jeden z kątów trójkąta ma miarę $45°$;
D. trójkąt jest rozwartokątny;
E. środek okręgu leży na jednym z boków trójkąta.

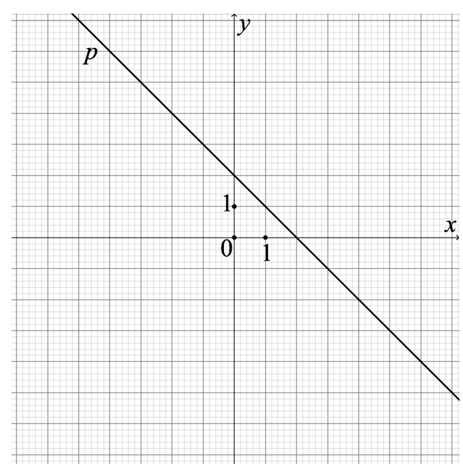
Zadanie 3. (2 punkty)

Rozważmy ułamek 0,1234567891011121314... , mający nieskończone rozwinięcie dziesiętne (wypisywane kolejno liczby naturalne 1, 2, 3, 4 itd.). Jaka cyfra znajduje się na dwusetnym miejscu po przecinku?

A. 0; **B.** 1; **C.** 2; **D.** 3; **E.** 9.

Zadanie 4. (2 punkty)

W układzie współrzędnych zaznaczono prostą p (rysunek). Zawiera ona wszystkie punkty płaszczyzny, dla których



A. pierwsza współrzędna jest o 2 większa od drugiej;
B. pierwsza współrzędna jest dwukrotnością drugiej;
C. obie współrzędne różnią się o 2;
D. druga współrzędna jest o 2 większa od pierwszej.
E. suma obu współrzędnych wynosi 2;

Zadanie 5. (2 punkty)

Suma wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $\left||x^2-3|+4\right|=5$ wynosi

A. $2\sqrt{2}+4$; **B.** $2-\sqrt{2}$; **C.** 4; **D.** 0; **E.** $2+\sqrt{2}$.

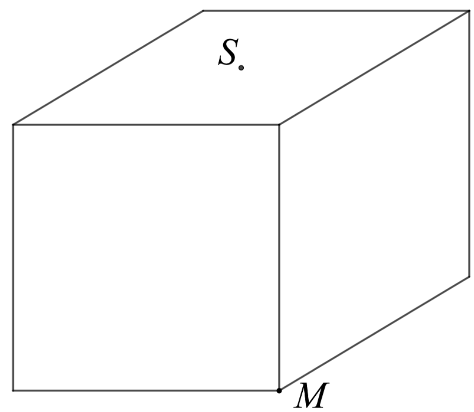
Zadanie 6. (2 punkty)

Wartość iloczynu $\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)$ jest równa

A. $\frac{2017}{2018}$; **B.** $\frac{4096}{6154}$; **C.** $\frac{673}{1009}$; **D.** $\frac{2019}{2018}$; **E.** $\frac{2019}{4096}$.

Zadanie 7. (2 punkty)

Na stole stoi sześcienne pudełko o krawędzi 2. W punkcie S na środku górnej ściany siedzi mrówka (rysunek). Chce ona przejść najkrótszą drogą po powierzchni bryły do wierzchołka M, leżącego na dolnej podstawie. Jaka jest długość tej najkrótszej trasy?



A. $\sqrt{5}+1$; **B.** $3+\sqrt{2}$;
C. $2+\sqrt{2}$; **D.** $\sqrt{10}$;
E. $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 8. (2 punkty)

W barze mlecznym oferowane są 4 rodzaje zupy, 7 drugich dań, 2 rodzaje kompotu i 4 desery. Janek każdego dnia kupuje dokładnie jedną zupę i dokładnie jedno drugie danie, czasami bierze też jakiś rodzaj kompotu albo jakiś deser – czyli jego obiad zawsze zawiera dwa lub trzy produkty. Ile różnych wariantów obiadu może zjeść Janek?

A. 168; **B.** 175; **C.** 196; **D.** 280; **E.** 420.

BRUDNOPIS

Zadanie 9. (4 punkty)

Udowodnij, że liczba $\frac{7^1+7^2+7^3+\ldots+7^{400}}{400}$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 10. (4 punkty)

Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie M. Pola trójkątów BCM i CDM wynoszą odpowiednio 12 i 8. Oblicz pole trapezu.

BRUDNOPIS

Zadanie 11. (4 punkty)

Odlewnik chce uzyskać stop metali A i B, w którym proporcja mas tych metali będzie wynosić 3 : 5. Dysponuje dwoma stopami metali A i B. W pierwszym metal A stanowi 40%, a w drugim 30%. W jakiej proporcji powinien dobrać do przetopienia te stopy?

BRUDNOPIS

Zadanie 12. (6 punktów)

Na czarodziejskiej polanie rośnie 15 białych i 10 czerwonych kwiatków. Kwiatki wolno zrywać tylko parami (dwa kwiatki równocześnie). Jeśli zerwiemy dwa kwiatki tego samego koloru, na polanie natychmiast wyrasta jeden nowy biały kwiatek. Jeśli natomiast zerwiemy dwa kwiatki różnych kolorów, na polanie natychmiast wyrastają trzy nowe czerwone kwiatki.

a) Czy można doprowadzić do sytuacji, że na polanie będzie tylko jeden kwiatek i będzie on koloru białego?

b) Czy można doprowadzić do sytuacji, że na polanie będzie tylko jeden kwiatek i będzie on koloru czerwonego?

c) Czy można doprowadzić do sytuacji, że na polanie będzie dokładnie 30 kwiatków – wszystkie koloru czerwonego?

Jeśli odpowiedź jest twierdząca, wystarczy wskazać sposób postępowania prowadzącego do uzyskania opisanej sytuacji. Jeśli danego układu kwiatków nie da się uzyskać, należy to uzasadnić przeprowadzając odpowiednie rozumowanie.

Zadanie 13. (6 punktów)

Odcinek AC jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku C ma miarę $45°$. Boki AB i BC mają długości odpowiednio 3 i $2\sqrt{10}$. Proste AD i BC przecinają się w punkcie K, zaś proste AB i CD w punkcie L. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz długość odcinka KL. Pamiętaj o podaniu uzasadnień.

BRUDNOPIS

BRUDNOPIS

TABELA ODPOWIEDZI

zadanie	A	B	C	D	E
1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	zadania otwarte - rozwiązania w arkuszu				
10					
11					
12					
13					