KURATORIUM OŚWIATY W KRAKOWIE

MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów dotychczasowych gimnazjów i klas dotychczasowych gimnazjów prowadzonych w szkołach innego typu województwa małopolskiego

Rok szkolny 2018/2019

ETAP REJONOWY — 10 grudnia 2018 roku, godz. 9:00

1. Przed Tobą zestaw **14** zadań konkursowych.
2. Na ich rozwiązanie masz **120** minut. Dziesięć minut przed upływem tego czasu zostaniesz o tym poinformowany przez członka Komisji Konkursowej.
3. Za bezbłędne rozwiązanie wszystkich zadań możesz uzyskać **60** punktów.
4. Za poprawne rozwiązanie każdego z zadań od **1** do **10** otrzymasz **3** punkty. Za poprawne rozwiązanie zadań **11** i **12** otrzymasz po **7** punktów. Za poprawne rozwiązanie zadań **13** i **14** otrzymasz po **8** punktów.
5. Odpowiedzi do zadań od **1** do **10** zaznacz symbolem × w tabeli odpowiedzi, która znajduje się na kolejnej stronie. Tylko odpowiedzi zaznaczone w tabeli będą oceniane. Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz symbolem × inną odpowiedź. Brak wyboru odpowiedzi będzie traktowany jako błędna odpowiedź. W każdym zadaniu zamkniętym z 5 proponowanych odpowiedzi tylko jedna jest poprawna.
6. W zadaniach od **11** do **14** przedstaw pełne rozwiązania, zapisując rozwiązanie każdego zadania na osobnej kartce opisanej jako czystopis z podaniem numeru zadania. Pamiętaj o zapisaniu potrzebnych obliczeń, komentarzy, wyjaśnień, uzasadnień, odpowiedzi. Oceniana jest całość rozumowania zamieszczonego w czystopisie.
7. Pisz długopisem lub piórem, nie używaj korektora ani wymazywalnych przyborów piśmienniczych. Użycie ołówka dozwolone jest wyłącznie do sporządzania rysunków.
8. Otrzymasz dodatkowe kartki przeznaczone na czystopis i brudnopis. Brudnopis nie podlega ocenie.
9. Podczas pracy nie możesz korzystać z kalkulatora i żadnych innych dodatkowych pomocy, z wyjątkiem podstawowych przyborów geometrycznych.
10. Przekaż wyłączony telefon komórkowy Komisji (jeśli go posiadasz).
11. Stwierdzenie niesamodzielności pracy lub przeszkadzanie innym spowoduje wykluczenie z udziału w Konkursie.

Powodzenia!

TABELA ODPOWIEDZI

zadanie	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	zadania otwarte: rozwiązania tych zadań zapisujemy na osobnych kartkach (każde zadanie na innej kartce!!!)				
12					
13					
14					

Odpowiedzi do każdego z zadań od 1 do 10 zaznacz w odpowiednim miejscu tabeli odpowiedzi

Zadanie 1 (3 punkty)

W pudełku jest 30 kul w trzech kolorach - niektóre kule są białe, niektóre czarne, a niektóre zielone, przy czym liczba zielonych jest parzysta. Wiadomo, że gdybyśmy z pudełka wyciągnęli losowo 9 kul, to wśród pozostałych na pewno pozostałaby co najmniej 1 biała i 8 czarnych. Ile zielonych kul jest w pudełku?

A. 10; **B.** 2; **C.** 22; **D.** 12; **E.** 4.

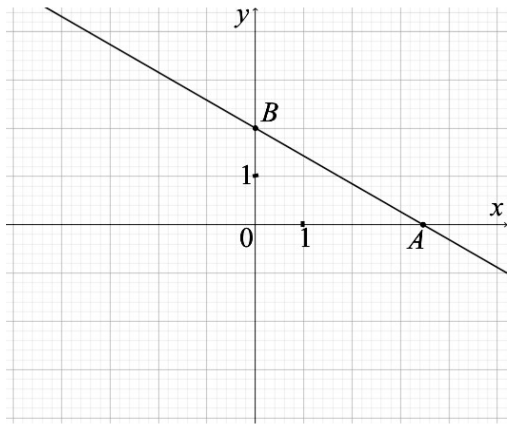
Zadanie 2 (3 punkty)

Zarówno iloczyn jak i suma cyfr pewnej liczby naturalnej wynoszą 70. Ile cyfr zawiera zapis dziesiętny tej liczby?

A. 53; **B.** 67; **C.** 59; **D.** 73; **E.** 56.

Zadanie 3 (3 punkty)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej danej wzorem $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + 2$. Wykres przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B. Odległość AB jest równa



A. 4; **B.** $3\frac{3}{4}$; **C.** $\frac{9-\sqrt{3}}{3}$;

D. $2\sqrt{3}$; **E.** $2+\sqrt{3}$.

Zadanie 4 (3 punkty)

W kombinatoryce definiuje się tzw. symbol Newtona $\binom{n}{k}$:

Dla liczb całkowitych nieujemnych n, k takich, że $n \geq k$ mamy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Wartość wyrażenia $\binom{20}{18} + \binom{12}{10}$ jest równa

A. 480; **B.** 256; **C.** 446; **D.** 322; **E.** 512.

Zadanie 5 (3 punkty)

Dwa okręgi o promieniach 4 i 1 są styczne zewnętrznie w punkcie A. Prosta p, która nie przechodzi przez A, jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach B i C. Jaką długość ma odcinek BC?

A. 5; **B.** $\sqrt{17}$; **C.** $\sqrt{21}$; **D.** $\sqrt{26}$; **E.** 4.

Zadanie 6 (3 punkty)

Długości wszystkich boków trójkąta zwiększono o 10%. O ile procent wzrosło jego pole?

A. 30%; **B.** 21%; **C.** 19%; **D.** 20%; **E.** 10%.

Zadanie 7 (3 punkty)

Automatyczny robot kroczący potrafi wykonywać trzy rodzaje ruchów:

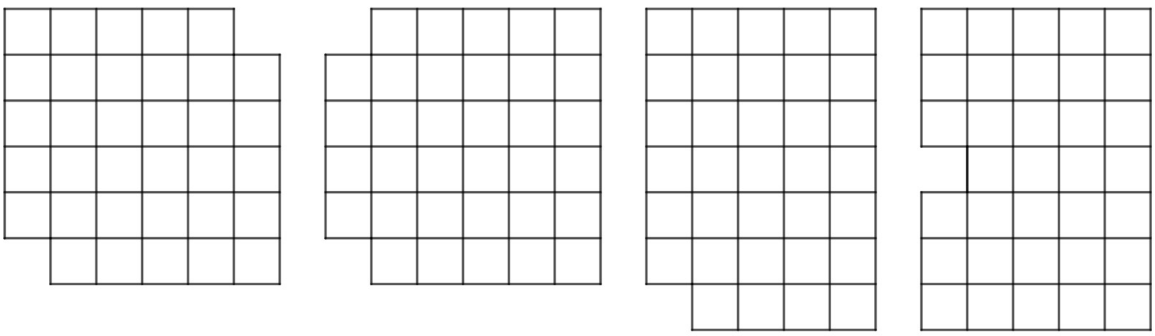
- duży krok do przodu na odległość 7 metrów,
- mały krok do przodu na odległość 5 metrów,
- obrót o 180 stopni (czyli zawrócenie w miejscu).

Na początku robot stoi skierowany w kierunku północnym. Ma dotrzeć do punktu położonego 11 metrów na północ od miejsca startu. Jaka jest minimalna liczba ruchów, które musi wykonać?

A. 7; **B.** 8; **C.** 4; **D.** 5; **E.** 6.

Zadanie 8 (3 punkty)

Mamy cztery różne kawałki czekolady, każdy z nich składa się z 34 kwadratowych kostek (rysunek). Chcemy każdy z tych kawałków podzielić na 17 części złożonych z dwóch złączonych kostek. Dla ilu spośród tych czterech kawałków taki podział jest niemożliwy?



A. dla wszystkich; **B.** dla trzech; **C.** dla dwóch;
D. dla jednego; **E.** zawsze jest możliwy.

Zadanie 9 (3 punkty)

Ile jest liczb pierwszych dwucyfrowych, których obie cyfry są również liczbami pierwszymi?

A. 8; **B.** 1; **C.** 16; **D.** 4; **E.** 2.

Zadanie 10 (3 punkty)

Sześciokąt foremny opisany na okręgu ma bok długości 2. Sześciokąt foremny wpisany w ten okrąg ma bok długości

A. $\sqrt{3}$; **B.** $\sqrt{2}$; **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **D.** 1; **E.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie każdego z zadań od 11 do 14 zapisz na osobnej kartce, opisanej numerem zadania

Zadanie 11 (7 punktów)

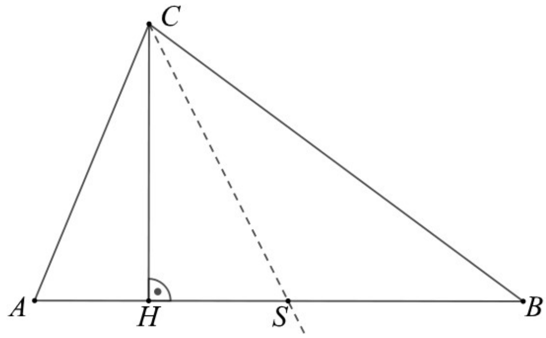
Dane jest równanie z trzema niewiadomymi x, y, z:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 14 = 2x + 6z .$$

Wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania w liczbach rzeczywistych.

Zadanie 12 (7 punktów)

Dany jest trójkąt ABC. Wysokość CH dzieli kąt $\angle ACB$ w taki sposób, że $\angle HCB = 2\angle ACH$ (rysunek). Dwusieczna kąta $\angle HCB$ przecina bok AB w punkcie S i trójkąt BCS jest równoramienny. Wykaż, że S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.



Zadanie 13 (8 punktów)

Do budowy pewnego urządzenia używa się odlanych z metalu sześcianów o krawędziach 1 cm, 2 cm i 3 cm. Każdy sześcian pokryty jest cienką warstwą specjalnej farby. Wiadomo, że metal i farba użyte do produkcji najmniejszego sześcianu kosztują 10 zł, a metal i farba zużyte do produkcji największego sześcianu kosztują 252 zł. Ile kosztują materiały potrzebne do produkcji średniego sześcianu?

Zadanie 14 (8 punktów)

Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$. Podstawa AB jest styczna do okręgu w punkcie P, a ramię BC w punkcie Q (rysunek). Wykaż, że odcinki PQ oraz CS są równoległe.