MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY

Rok szkolny 2018/2019

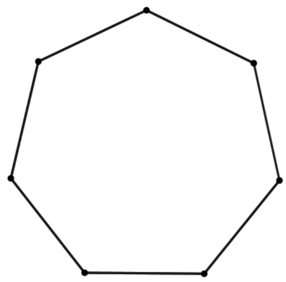
ETAP WOJEWÓDZKI — 5 marca 2019 roku

PRAWIDŁOWE ODPOWIEDZI I PUNKTACJA

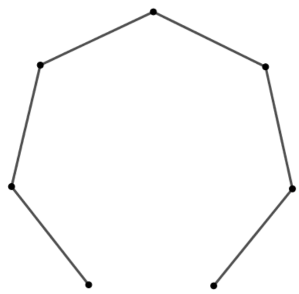
<table>
<tr><th>zadanie</th><th>odpowiedź</th><th>punkty</th></tr>
<tr><td>1</td><td>A</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>B</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>E</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>A</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>E</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>C</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>E</td><td>3</td></tr>
<tr><td>9</td><td>C</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>A</td><td>3</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="5">zadania otwarte</td><td>6</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>13</td><td>6</td></tr>
<tr><td>14</td><td>6</td></tr>
<tr><td>15</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">maksymalna możliwa łączna liczba punktów</td><td>60</td></tr>
</table>

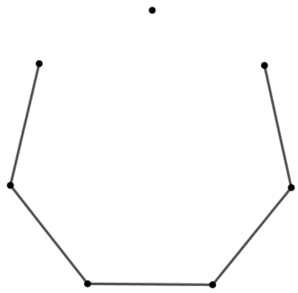
Rozwiązanie zadania 11

Mamy 7 patyczków jednakowej długości, z których układamy zarys 7-kąta foremnego. Następnie dwóch graczy gra w następującą grę: w swoim ruchu gracz może usunąć ze stołu dowolny patyczek albo dwa patyczki mające wspólny punkt, następnie ruch wykonuje drugi gracz itd. Wygrywa gracz, który zdejmie ostatni patyczek ze stołu. Który z graczy (rozpoczynający czy drugi) ma strategię wygrywającą (tzn. może zapewnić sobie zwycięstwo w każdej sytuacji, niezależnie od tego, jak będzie grać jego przeciwnik)?

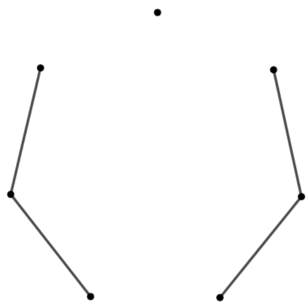


Wykażemy, że strategię wygrywającą ma drugi gracz.
Pierwszy gracz w swoim pierwszym ruchu może zdjąć jeden lub dwa sąsiednie patyczki:





W każdej z tych dwóch sytuacji drugi gracz może doprowadzić do pozostawienia na planszy dwóch rozłącznych par patyczków:



Ten układ gwarantuje wygraną drugiemu graczowi.
Jeśli pierwszy gracz zdejmie którąś parę patyczków, drugi usunie drugą parę i wygra.
Jeśli pierwszy gracz zdejmie jeden patyczek, drugi gracz zdejmie również jeden patyczek, ale z drugiej pary - na planszy pozostaną wtedy dwa rozłączne patyczki. Pierwszy zdejmie jeden z nich, a drugi zdejmie ostatni i wygra.

Punktacja zadania 11

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania
Przykłady:

- uczeń poprawnie rozważył co najmniej jedną konkretną rozgrywkę zgodną z regułami (np. rozrysował wszystkie ruchy)

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń podjął próbę pełnego rozważenia jednego z dwóch "otwarć" (np. sytuacji, że pierwszy gracz w pierwszym ruchu zdjął jeden patyczek), ale rozumowanie zawiera luki, jest niekompletne

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń rozważa oba możliwe "otwarcia", ale rozumowanie w obu przypadkach zawiera istotne luki (np. pominięte przypadki, brak kluczowych uzasadnień)
- uczeń w pełni poprawnie rozważa jedno z możliwych "otwarć" wykazując, że strategię wygrywającą ma drugi gracz

4 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń rozważa oba możliwe "otwarcia"; jedno bezbłędnie, w drugim rozumowanie zawiera istotne luki

5 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki
Przykłady:

- uczeń niemal poprawnie rozważa oba możliwe "otwarcia", ale brakuje uzasadnienia, że układ z dwoma izolowanymi parami patyczków jest wygrywający lub brakuje zapisu ostatecznego etapu gry (zebrania pojedynczych lub podwójnych patyczków)

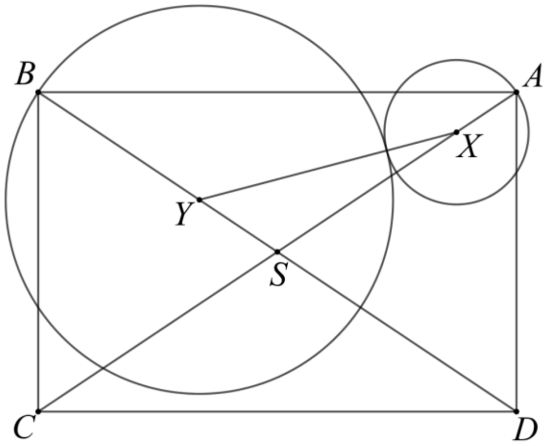
6 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

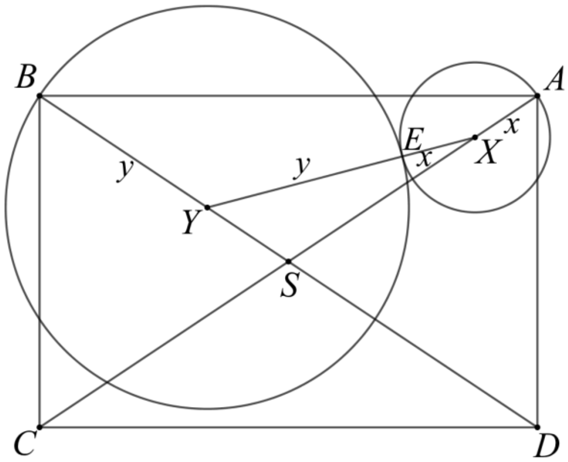
- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 12

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AB = 6$, $BC = 4$. S jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta. Na odcinkach AS i BS wybrano odpowiednio punkty X i Y takie, że okrąg o środku X i promieniu XA oraz okrąg o środku Y i promieniu YB są zewnętrznie styczne (rysunek). Oblicz obwód trójkąta XYS.



Oznaczmy E - punkt styczności okręgów, oraz x i y - odpowiednio promienie okręgów o środkach X i Y (rysunek).



Zauważmy, że $XE = XA = x$ oraz $YE = YB = y$.

Obliczmy obwód trójkąta XYS:

$XY + SX + SY = XE + YE + SX + SY =$

$= SX + XA + SY + YB = SA + SB$

Z własności przekątnych prostokąta (połowią się i są równej długości) wiadomo, że $SA + SB = AC$, czyli obwód trójkąta XYS jest równy długości przekątnej prostokąta $ABCD$.

Z twierdzenia Pitagorasa uzyskujemy, że obwód ten wynosi $\sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Punktacja zadania 12

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania
Przykłady:

- uczeń poprawnie obliczył długość przekątnej prostokąta (lub jej połowy)
- uczeń zauważył, że długość odcinka XY jest sumą promieni okręgów

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń zauważył, że długość odcinka XY jest sumą promieni okręgów oraz poprawnie obliczył długość przekątnej prostokąta (lub jej połowy)

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń wykazał, że $XE = XA$ lub $YE = YB$ (E - punkt styczności - jak w opisanym rozwiązaniu)

4 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń wykazał, że obwód trójkąta XYS to suma długości SA i SB (lub długość przekątnej CA)

5 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń obliczył obwód trójkąta używając poprawnej metody, ale w trakcie obliczeń popełnił błąd rachunkowy

6 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 13

Wyznacz wszystkie rozwiązania rzeczywiste układu równań:

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 4y + 1 = 0 \\ 2y^2 - 8x + 12y + 25 = 0 \end{cases}.$$

I sposób

Dodajmy stronami oba równania układu:

$2x^2 - 12x + 2y^2 + 8y + 26 = 0$

Po skróceniu przez 2 i pogrupowaniu uzyskujemy:

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 0$

czyli

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 0$

Kwadraty liczb rzeczywistych są zawsze nieujemne. Ich suma może wynosić 0 tylko, gdy oba kwadraty są zerami.

Zatem jedyne możliwe rozwiązanie tego równania to $x = 3$, $y = -2$.

Równanie zostało uzyskane ze zsumowania równań pewnego układu równań. Wszystkie rozwiązania układu równań są również rozwiązaniami tego równania, ale niekoniecznie jest odwrotnie.

Należy zatem sprawdzić, czy uzyskana para liczb rzeczywiście jest rozwiązaniem układu równań.

Po podstawieniu uzyskujemy:

$$\begin{cases} 15 = 0 \\ -15 = 0 \end{cases}$$

co oznacza, że układ równań nie ma rozwiązań.

II sposób (żmudny - ten sposób zdecydowanie nie jest zalecany!)

Obliczmy y z pierwszego równania:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{4}$$

Po podstawieniu do drugiego równania i żmudnych obliczeniach uzyskujemy:

$$\frac{4x^4 - 16x^3 + 68x^2 - 168x + 225}{8} = 0$$

czyli $4x^4 - 16x^3 + 68x^2 - 168x + 225 = 0$

Można to wyrażenie pogrupować:

$4x^2(x^2 - 4x + 4) + (49x^2 - 168x + 144) + 3x^2 + 81 = 0$

$4x^2(x-2)^2 + (7x-12)^2 + 3x^2 + 81 = 0$

Wszystkie liczby po lewej stronie są nieujemne, a 81 jest liczbą dodatnią, ich suma nie może więc wynosić 0. Zatem układ równań nie ma rozwiązań

Punktacja zadania 13

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania
Przykłady:

- uczeń poprawnie zsumował oba równania
- uczeń poprawnie wyliczył x za pomocą y (z drugiego równania) lub y za pomocą x (z pierwszego równania)

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń pogrupował zsumowane równania do postaci dającej się sprowadzić do wzorów skróconego mnożenia (np. $\left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2+4y+4\right)=0$)
- uczeń uzyskał poprawne równanie z jedną niewiadomą (np. $4x^4-16x^3+68x^2-168x+225=0$)

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń poprawnie zapisał sumę kwadratów $(x-3)^2+(y+2)^2=0$
- uczeń pogrupował równanie dążąc do sumy kwadratów (np. $4x^2\left(x^2-4x+4\right)+\left(49x^2-168x+144\right)+3x^2+81=0$)

4 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń zauważył, że jedyne możliwe rozwiązanie to x = 3, y = -2.
- uczeń uzyskał postać zbliżoną do $4x^2(x-2)^2+(7x-12)^2+3x^2+81=0$ z drobnym błędem rachunkowym

5 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń zauważył, że uzyskane rozwiązanie wymaga sprawdzenia
- uczeń uzyskał równanie $4x^2(x-2)^2+(7x-12)^2+3x^2+81=0$

6 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 14

Hrabia w testamencie zapisał swoim czterem córkom osiem sztabek złota - o masach 1 dag, 2 dag, 3 dag, 4 dag, 5 dag, 6 dag, 7 dag i 8 dag. Zgodnie z życzeniem hrabiego każda córka powinna otrzymać po dwie sztabki. Druga córka ma otrzymać o 2 dag złota mniej, niż pierwsza, trzecia o 2 dag mniej, niż druga, a czwarta o 2 dag mniej, niż trzecia. Na ile sposobów można rozdzielić sztabki pomiędzy córki tak, by warunki testamentu były wypełnione?

Całe złoto waży w sumie 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 dag

Córki mają dostać kolejno x, x - 2, x - 4, x - 6 dag.

$x + x - 2 + x - 4 + x - 6 = 36$, czyli $x = 12$

Córki mają więc dostać 12 dag, 10 dag, 8 dag i 6 dag.

Rozważmy możliwe rozkłady sztabek.

12 = 5 + 7
zostają liczby 1, 2, 3, 4, 6, 8

10 = 4 + 6
zostają liczby 1, 2, 3, 8

8 nie da się uzyskać

10 = 2 + 8
zostają liczby 1, 3, 4, 6

8 nie da się uzyskać

12 = 4 + 8
zostają liczby 1, 2, 3, 5, 6, 7

10 = 7 + 3
zostają liczby 1, 2, 5, 6

8 = 2 + 6
6 = 1 + 5

Zatem sztabki można rozdzielić tylko na jeden sposób:

- pierwsza córka dostanie 4 dag i 8 dag
- druga córka dostanie 3 dag i 7 dag
- trzecia córka dostanie 2 dag i 6 dag
- czwarta córka dostanie 1 dag i 5 dag

Punktacja zadania 14

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania
Przykłady:

- uczeń ułożył równanie pozwalające obliczyć ilość złota dla każdej z córek

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń ustalił, ile dag złota ma uzyskać każda z córek

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń poprawnie rozważył wszystkie przypadki obdzielenia sztabkami jednej z córek (np. 12 = 5 + 7 lub 12 = 4 + 8)
- uczeń ustali masę złota przypadającą każdej córce, poda poprawny sposób rozdzielenia sztabek bez uwzględnienia innych przypadków.

4 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń poprawnie rozważył wszystkie przypadki obdzielenia sztabkami dwóch córek (np. 12 = 5 + 7, 10 = 4 + 6 lub 12 = 5 + 7, 10 = 2 + 8 lub 12 = 4 + 8, 10 = 3 + 7)

5 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń rozważył możliwości dla wszystkich córek popełniając drobny błąd rachunkowy lub gubiąc mało istotny przypadek, nie wpływający na poprawność odpowiedzi, w przypadku jednej z córek

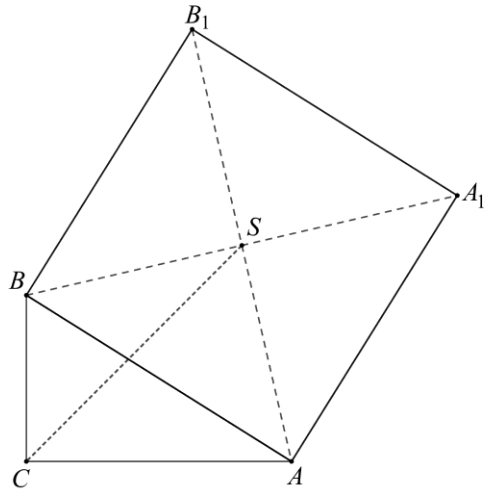
6 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 15

Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym kąt przy wierzchołku *A* ma miarę $35°$. Na boku *AB* na zewnątrz trójkąta zbudowano kwadrat AA_1B_1B, którego przekątne przecinają się w punkcie *S* (rysunek). Wyznacz miary kątów w trójkątach *CAS* i *SBC*.



Wiadomo, że $\angle CAB = 35°$, $\angle ABC = 90° - 35° = 55°$.
Trójkąt *SBA* jest prostokątny równoramienny, więc $\angle BAS = \angle SBA = 45°$.
Zatem $\angle CAS = 35° + 45° = 80°$ oraz $\angle SBC = 45° + 55° = 100°$.
Na czworokącie *BCAS* można opisać okrąg (bo kąty przy wierzchołkach *C* i *S* są proste).
W okręgu kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Zatem:
$\angle SCA = \angle SBA = 45°$
$\angle ASC = \angle ABC = 55°$
$\angle CSB = \angle CAB = 35°$
$\angle BCS = \angle BAS = 45°$
Podsumowując: w trójkącie *CAS* kąty przy kolejnych wierzchołkach mają miary $45°$, $80°$ i $55°$, zaś w trójkącie *SBC* $35°$, $100°$ i $45°$.

Punktacja zadania 15

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania
Przykłady

- ustalenie miary kąta $\angle CAS$ lub $\angle SBC$

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- ustalenie miar kątów $\angle CAS$ oraz $\angle SBC$

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- zauważenie istnienia okręgu opisanego na czworokącie *CASB*.

4 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- zauważenie przynajmniej jednej pary kątów wpisanych opartych na tym samym łuku, z których jeden jest kątem szukanym, a drugi jest kątem znanym

5 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- obliczenie miar kątów z błędem rachunkowym

6 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów