Kuratorium Oświaty w Krakowie

MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów

Rok szkolny 2016/2017

ETAP WOJEWÓDZKI — 13 marca 2017 roku

1. Przed Tobą zestaw 15 zadań konkursowych.
2. Na ich rozwiązanie masz **120** minut. Piętnaście minut przed upływem tego czasu zostaniesz o tym poinformowany przez członka Komisji Konkursowej.
3. Za bezbłędne rozwiązanie wszystkich zadań możesz uzyskać **34** punkty. W każdym zadaniu zamkniętym spośród 5 proponowanych odpowiedzi tylko jedna jest poprawna.
4. Za poprawne rozwiązanie każdego z zadań od 1 do 4 otrzymasz **1** punkt. Za poprawne rozwiązanie każdego z zadań od 5 do 10 otrzymasz **2** punkty.
5. Odpowiedzi do zadań zaznacz symbolem **X** w tabeli odpowiedzi, która znajduje się na końcu arkusza. Tylko odpowiedzi zaznaczone w tabeli będą oceniane. Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz symbolem **X** inną odpowiedź. Brak wyboru odpowiedzi będzie traktowany jako błędna odpowiedź.
6. W zadaniach 11.–15. przedstaw pełne rozwiązania, każde na oddzielnej kartce, pamiętając o wszystkich obliczeniach, potrzebnych uzasadnieniach i odpowiedziach wraz z niezbędnymi jednostkami (w czystopisie).
7. Pisz długopisem lub piórem, nie używaj korektora. Jedną kartkę z tych, które otrzymasz, możesz poświęcić na brudnopis. Brudnopis nie podlega ocenie.
8. Podczas pracy nie możesz korzystać z kalkulatora.
9. Przekaż wyłączony telefon komórkowy Komisji (jeśli go posiadasz).
10. Stwierdzenie niesamodzielności pracy lub przeszkadzanie innym, spowoduje wykluczenie Ciebie z udziału w Konkursie.

Życzymy Ci powodzenia

Zadanie 1. *(1 pkt.)*

Przyjmij, że $\frac{5}{8}a - 0{,}625b = \frac{7}{12}$. Stąd wynika, że $\frac{3}{7}b - \frac{3}{7}a$ jest równe:

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{15}{56}$ **C.** $\frac{35}{24}$ **D.** $-0{,}4$ **E.** $0{,}8$

Zadanie 2. *(1 pkt.)*

Wiemy, że $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ dla dodatniej liczby naturalnej *n*. W zapisie dziesiętnym $2092278988y000$ liczby $16!$ zgubiono cyfrę tysięcy (oznaczoną literą *y*). Brakująca cyfra *y* to:

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9 **E.** 0

Zadanie 3. *(1 pkt.)*

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym o polu 24 cm^2. Objętość tego stożka jest równa:

A. $8\pi\ cm^3$ **B.** $8\pi\sqrt{6}\ cm^3$ **C.** $16\pi\ cm^3$ **D.** $16\pi\sqrt{3}\ cm^3$ **E.** $16\pi\sqrt{6}\ cm^3$

Zadanie 4. *(1 pkt.)*

Punkty *A* i *B* są symetryczne względem osi *y* prostokątnego układu współrzędnych. Punkty te mają współrzędne $A = (3,\ 2m+3)$, $B = (4k-1,\ 7-2m)$. Stąd:

A. $m = 1$, $k = -\frac{1}{2}$ **B.** $m = 1$, $k = 1$ **C.** $m = -11$, $k = -\frac{1}{2}$ **D.** $m = -11$, $k = 1$ **E.** $m = 11$, $k = \frac{1}{2}$

Zadanie 5. *(2 pkt.)*

Pole trapezu prostokątnego wynosi $12\sqrt{3}$. Krótsza przekątna tego trapezu dzieli go na dwie części, z których jedna jest trójkątem równobocznym. Obwód tego trapezu jest równy:

A. $10\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ **B.** $10\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{6} + 8\sqrt{2}$ **D.** $12\sqrt{2} + \sqrt{6}$ **E.** $12\sqrt{2}$

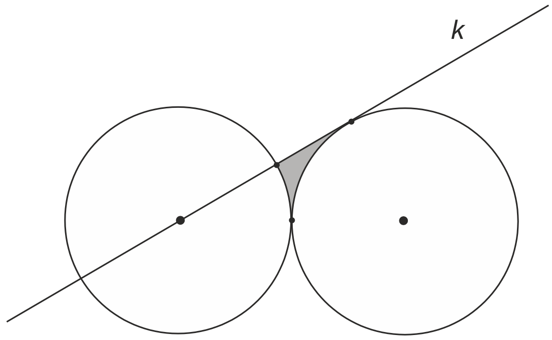
Zadanie 6. *(2 pkt.)*

Załóżmy, że a i b są dodatnimi liczbami, takimi że $\frac{a+b}{a} = 3$. Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{4b}{a+b}$ jest równa:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $1\frac{1}{3}$ **C.** $2\frac{2}{3}$ **D.** 12 **E.** $\frac{3}{4}$

Zadanie 7. *(2 pkt.)*

Dwa okręgi o promieniach długości r są styczne zewnętrznie. Przez środek jednego z nich poprowadzono prostą k styczną do drugiego okręgu. Pole figury (zacieniowanej na rysunku) ograniczonej tymi okręgami i prostą k jest równe:



A. $\frac{r^2}{4}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$ **B.** $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi r^2}{2}$ **C.** $\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{r^2\sqrt{3}-\pi r^2}{4}$ **E.** $\frac{r^2}{2}\left(2\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

Zadanie 8. *(2 pkt.)*

Liczba $6^5-6!$ jest kwadratem liczby:

A. 76 **B.** 84 **C.** 86 **D.** 94 **E.** 96

Zadanie 9. *(2 pkt)*

Pole powierzchni całkowitej walca wynosi 144π. Pole powierzchni bocznej tego walca jest 6 razy większe od pola jego podstawy. Objętość tego walca jest równa:

A. 81π **B.** $81\sqrt{2}\pi$ **C.** 162π **D.** $144\sqrt{2}\pi$ **E.** $162\sqrt{2}\pi$

Zadanie 10. *(2 pkt)*

W szkolnej drużynie siatkarskiej, która liczyła 15 osób, średnia wzrostu zawodników wynosiła 183 cm. Z drużyny odeszło trzech zawodników o średniej ich wzrostu 193 cm. Średnia wzrostu pozostałych w drużynie zawodników jest od średniej 183 cm:

A. mniejsza o 1,5 cm,

B. mniejsza o 2,5 cm ,

C. mniejsza o 10 cm,

D. większa o 1,5 cm,

E. większa o 2,5 cm.

TABELA ODPOWIEDZI

Zad. 1	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 2	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 3	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 4	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 5	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 6	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 7	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 8	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 9	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Zad. 10	**A.**	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**

Zadanie 11. *(2 pkt.)*
Dane są liczby rzeczywiste x i y takie, że $x-y=5$, $xy=8$. Oblicz wartość liczbową wyrażenia x^3y+xy^3.

Zadanie 12. *(3 pkt.)*

Suma dwóch różnych liczb naturalnych dodatnich jest równa 180. Dzieląc większą z nich przez mniejszą otrzymano iloraz 11 i resztę 12. Wyznacz te liczby.

Zadanie 13. *(4 pkt.)*

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym wydrążono stożek o największej możliwej objętości. Wyznacz stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa.

Zadanie 14. *(4 pkt.)*

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 kwadratu liczby naturalnej niepodzielnej przez 3 jest równa 1.

Zadanie 15. *(5 pkt.)*

Ze stożka o polu powierzchni całkowitej 70π i polu powierzchni bocznej 50π wydrążono półkulę o promieniu długości $2\sqrt{3}$ i środku, który jest środkiem podstawy stożka. Oblicz pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły. Sporządź odpowiedni rysunek.

Brudnopis