KURATORIUM OŚWIATY
W KRAKOWIE

MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów dotychczasowych gimnazjów i klas dotychczasowych gimnazjów prowadzonych w szkołach innego typu województwa małopolskiego
Rok szkolny 2018/2019 — ETAP WOJEWÓDZKI — 5 marca 2019 roku

1. Przed Tobą zestaw **15** zadań konkursowych.

2. Na ich rozwiązanie masz **120** minut. Dziesięć minut przed upływem tego czasu zostaniesz o tym poinformowany przez członka Komisji Konkursowej.

3. Za bezbłędne rozwiązanie wszystkich zadań możesz uzyskać **60** punktów.

4. Za poprawne rozwiązanie każdego z zadań od **1** do **10** otrzymasz **3** punkty. Za poprawne rozwiązanie każdego z zadań od **11** do **15** otrzymasz **6** punktów.

5. Odpowiedzi do zadań od **1** do **10** zaznacz symbolem × w tabeli odpowiedzi, która znajduje się na kolejnej stronie. Tylko odpowiedzi zaznaczone w tabeli będą oceniane. Jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz symbolem × inną odpowiedź. Brak wyboru odpowiedzi będzie traktowany jako błędna odpowiedź. W każdym zadaniu zamkniętym z 5 proponowanych odpowiedzi tylko jedna jest poprawna.

6. W zadaniach od **11** do **15** przedstaw pełne rozwiązania, zapisując rozwiązanie każdego zadania na osobnej kartce opisanej jako czystopis z podaniem numeru zadania. Pamiętaj o zapisaniu potrzebnych obliczeń, komentarzy, wyjaśnień, uzasadnień, odpowiedzi. Oceniana jest całość rozumowania zamieszczonego w czystopisie.

7. Pisz długopisem lub piórem, nie używaj korektora ani wymazywalnych przyborów piśmienniczych. Użycie ołówka dozwolone jest wyłącznie do sporządzania rysunków.

8. Otrzymasz dodatkowe kartki przeznaczone na czystopis i brudnopis. Brudnopis nie podlega ocenie.

9. Podczas pracy nie możesz korzystać z kalkulatora i żadnych innych dodatkowych pomocy, z wyjątkiem podstawowych przyborów geometrycznych.

10. Przekaż wyłączony telefon komórkowy Komisji (jeśli go posiadasz).

11. Stwierdzenie niesamodzielności pracy lub przeszkadzanie innym spowoduje wykluczenie z udziału w Konkursie.

Powodzenia!

TABELA ODPOWIEDZI

zadanie	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	zadania otwarte: rozwiązania tych zadań zapisujemy na osobnych kartkach (każde zadanie na innej kartce!!!)				
12					
13					
14					
15					

Odpowiedzi do każdego z zadań od 1 do 10 zaznacz w odpowiednim miejscu tabeli odpowiedzi

Zadanie 1 (3 punkty)

Długości boków prostokąta wyrażone są liczbami całkowitymi. Jeden z boków jest cztery razy krótszy od drugiego boku. Prostokąt ten rozcięto na 56 kwadratów. Wiadomo, że 55 z nich ma pole 1, a ostatni ma pole inne niż 1. Która z poniższych liczb może być polem ostatniego kwadratu?

A. 9; **B.** 16; **C.** 36; **D.** 25; **E.** 4.

Zadanie 2 (3 punkty)

Każdy wierzchołek wielokąta foremnego pokolorowano na biało albo na czerwono. Jeżeli wierzchołek ma kolor biały, to oba wierzchołki sąsiadujące z nim są tego samego koloru (oba białe albo oba czerwone). Jeśli wierzchołek ma kolor czerwony, to oba wierzchołki sąsiadujące z nim są różnych kolorów (jeden biały, jeden czerwony). Wiadomo, że przynajmniej jeden z wierzchołków wielokąta jest czerwony. Która z podanych liczb nie może być równa liczbie wszystkich wierzchołków tego wielokąta?

A. 2018; **B.** 2019; **C.** 78; **D.** 87; **E.** 111.

Zadanie 3 (3 punkty)

Na stoliku była pewna liczba szklanek, niektóre z nich były pełne mleka, inne zaś puste. Liczba szklanek pustych stanowiła $\frac{1}{6}$ liczby szklanek pełnych. Potem Zygmunt wypił mleko z jednej ze szklanek i obecnie liczba szklanek pustych stanowi $\frac{1}{6}$ liczby wszystkich szklanek. Ile szklanek jest na stole?

A. 36; **B.** 42; **C.** 70; **D.** 25; **E.** 30.

Zadanie 4 (3 punkty)

Gdyby Bazyli i Teodor pracowali razem, pomalowanie pokoju zajęłoby im 12 godzin. Jednak po 10 godzinach wspólnej pracy Teodor źle się poczuł, i Bazyli potrzebował jeszcze 5 godzin na samodzielne dokończenie pracy. Ile czasu potrzebowałby Bazyli na samodzielne dokończenie malowania, gdyby Teodor przestał pracować po 6 godzinach wspólnej pracy?

A. 12 godzin; **B.** 10 godzin; **C.** 13 godzin; **D.** 9 godzin; **E.** 15 godzin.

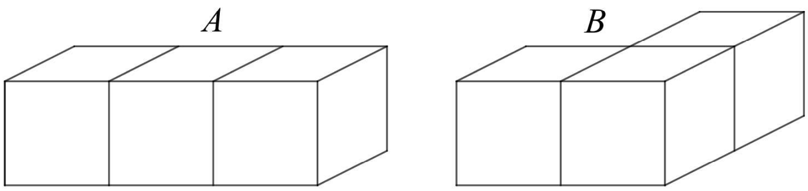
Zadanie 5 (3 punkty)

Pewna liczba naturalna N ma 100 cyfr. Wiadomo, że cyfrą jedności jest liczba podzielna przez 4. Każde dwie kolejne cyfry zapisu dziesiętnego liczby N tworzą (czytane od lewej, bez zmiany ich kolejności) liczbę podzielną przez 13 lub przez 37. Jaka jest pierwsza cyfra liczby N?

A. 1; **B.** 4; **C.** 3; **D.** 7; **E.** 5.

Zadanie 6 (3 punkty)

Z trzech sześcianów o krawędzi 1 możemy zbudować dwa rodzaje klocków: typu A i typu B (rysunek).



Tworzymy z nich pięć zestawów:

- zestaw I zawiera 2 klocki typu A i 7 klocków typu B
- zestaw II zawiera 9 klocków typu A
- zestaw III zawiera 9 klocków typu B
- zestaw IV zawiera 5 klocków typu A i 4 klocki typu B
- zestaw V zawiera 6 klocków typu A i 3 klocki typu B

Z klocków każdego zestawu próbujemy złożyć sześcian o krawędzi 3. Dla ilu spośród podanych zestawów jest to możliwe?

A. tylko dla czterech; **B.** tylko dla trzech; **C.** tylko dla dwóch;
D. tylko dla jednego; **E.** dla wszystkich pięciu.

Zadanie 7 (3 punkty)

Wybierz największą liczbę spośród podanych:

A. 4^{123}; **B.** 3^{150}; **C.** 2^{250}; **D.** 9^{74}; **E.** 5^{100}.

Zadanie 8 (3 punkty)

W trapezie równoramiennym stosunek długości podstaw wynosi 4 : 1. Prosta równoległa do przekątnej przecina środek dłuższej podstawy i odcina od trapezu trójkąt o polu 4. Jakie jest pole trapezu?

A. 10; **B.** 15; **C.** 16; **D.** 12; **E.** 20.

Zadanie 9 (3 punkty)

Liczba $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ jest równa

A. $1+5\sqrt{3}$ **B.** $1+3\sqrt{5}$; **C.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **D.** $9-2\sqrt{5}$; **E.** $\sqrt{15}-2\sqrt{2}$.

Zadanie 10 (3 punkty)

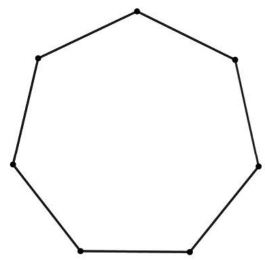
Ile rozwiązań ujemnych ma równanie $\left|\left||x+1|-2\right|+3\right|-4=5$?

A. 1; **B.** 0; **C.** 3; **D.** 4; **E.** 2.

Rozwiązanie każdego z zadań od 11 do 15 zapisz na osobnej kartce, opisanej numerem zadania

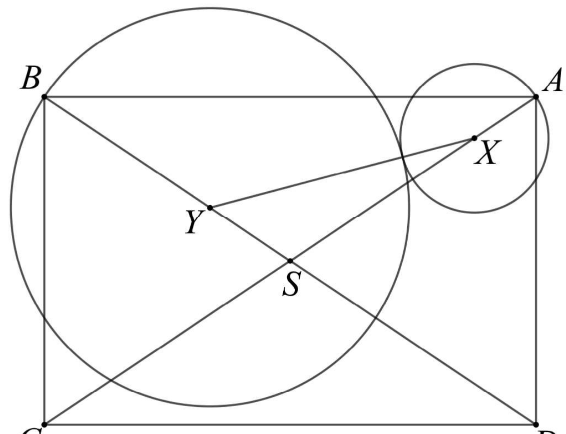
Zadanie 11. (6 punktów)

Mamy 7 patyczków jednakowej długości, z których układamy zarys 7-kąta foremnego. Następnie dwóch graczy gra w następującą grę: w swoim ruchu gracz może usunąć ze stołu dowolny patyczek albo dwa patyczki mające wspólny punkt, następnie ruch wykonuje drugi gracz itd. Wygrywa gracz, który zdejmie ostatni patyczek ze stołu. Który z graczy (rozpoczynający czy drugi) ma strategię wygrywającą (tzn. może zapewnić sobie zwycięstwo w każdej sytuacji, niezależnie od tego, jak będzie grać jego przeciwnik)?



Zadanie 12. (6 punktów)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AB = 6$, $BC = 4$. S jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta. Na odcinkach AS i BS wybrano odpowiednio punkty X i Y takie, że okrąg o środku X i promieniu XA oraz okrąg o środku Y i promieniu YB są zewnętrznie styczne (rysunek). Oblicz obwód trójkąta XYS.



Zadanie 13. (6 punktów)

Wyznacz wszystkie rozwiązania rzeczywiste układu równań:

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 4y + 1 = 0 \\ 2y^2 - 8x + 12y + 25 = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 14. (6 punktów)

Hrabia w testamencie zapisał swoim czterem córkom osiem sztabek złota - o masach 1 dag, 2 dag, 3 dag, 4 dag, 5 dag, 6 dag, 7 dag i 8 dag. Zgodnie z życzeniem hrabiego każda córka powinna otrzymać po dwie sztabki. Druga córka ma otrzymać o 2 dag złota mniej, niż pierwsza, trzecia o 2 dag mniej, niż druga, a czwarta o 2 dag mniej, niż trzecia. Na ile sposobów można rozdzielić sztabki pomiędzy córki tak, by warunki testamentu były wypełnione?

Zadanie 15. (6 punktów)

Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym kąt przy wierzchołku *A* ma miarę $35°$. Na boku *AB* na zewnątrz trójkąta zbudowano kwadrat AA_1B_1B, którego przekątne przecinają się w punkcie *S* (rysunek). Wyznacz miary kątów w trójkątach *CAS* i *SBC*.