MAŁOPOLSKI KONKURS MATEMATYCZNY

Rok szkolny 2017/2018

ETAP WOJEWÓDZKI - rozwiązania

PRAWIDŁOWE ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

<table>
<tr><th>zadanie</th><th>odpowiedź</th><th>punkty</th></tr>
<tr><td>1</td><td>A</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>D</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>D</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>E</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>C</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>A</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>A</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>B</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="4">zadania otwarte</td><td>6</td></tr>
<tr><td>10</td><td>6</td></tr>
<tr><td>11</td><td>6</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">maksymalna możliwa łączna liczba punktów</td><td>40</td></tr>
</table>

Rozwiązanie zadania 9

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x; y) będące rozwiązaniami równania $\frac{25}{xy}+\frac{5}{x}=1$.

I sposób:
Ze względu na występujące w równaniu ułamki $x \neq 0$ oraz $y \neq 0$.

$\frac{25}{xy}+\frac{5}{x}=1 / \cdot xy$

$25+5y=xy$

$(x-5)y=25$

Liczby x – 5 oraz y są całkowite, rozważmy więc wszystkie możliwe przedstawienia liczby 25 w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych:

x - 5	x	y
1	6	25
25	30	1
5	10	5
–1	4	–25
–25	–20	–1
–5	0	–5

Ostatnie z uzyskanych rozwiązań nie spełnia założeń.
Zadanie ma zatem 5 rozwiązań, są to pary (6; 25), (30; 1), (10; 5), (4; –25) i (–20; –1).

II sposób:
Można przekształcić początkowe równanie tak, by wyznaczyć jedną niewiadomą za pomocą drugiej, np.

$x=\frac{5y+25}{y}=5+\frac{25}{y}$.

x ma być liczbą całkowitą, więc y musi być całkowitym dzielnikiem 25 (czyli 1, 5, 25, –1, –5 lub –25), co po uwzględnieniu założeń daje 5 rozwiązań podanych w sposobie I.

Punktacja zadania 9

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń przemnożył równanie obustronnie przez xy

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń zapisał uzyskane równanie w postaci iloczynu porównywanego do liczby całkowitej
- uczeń wyznaczył jedną niewiadomą za pomocą drugiej w sposób pozwalający na rozważanie przypadków; np. $x = 5 + \frac{25}{y}$ lub $y = \frac{25}{x-5}$

3 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń rozważa przypadki analizując odpowiednie dzielniki, ale nie rozważa wszystkich przypadków (np. pomija dzielniki ujemne); wymagane jest zauważenie co najmniej 3 przypadków
- uczeń rozważając wszystkie przypadki popełnia przy tym błędy rachunkowe (przy jednym błędzie uczeń może otrzymać punkty za kolejne etapy rozwiązania, a za całość otrzymuje 1 punkt mniej)

4 pkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń poprawnie wyznaczył wszystkie pary liczb z postaci iloczynowej
- uczeń poprawnie wyznaczył wszystkie pary liczb wyliczając jedną niewiadomą za pomocą drugiej

5 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń podał odpowiedź nie odrzucając przypadku nie spełniającego założeń
- uczeń poprawnie rozważył wszystkie pary liczb i uwzględnił założenia (założenia mogły być podane na początku rozwiązania albo uczeń weryfikując uzyskane wyniki zauważa, że dla $x = 0$ równanie nie jest określone), ale popełnił w trakcie rozwiązywania błąd rachunkowy w jednym z przypadków

6 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

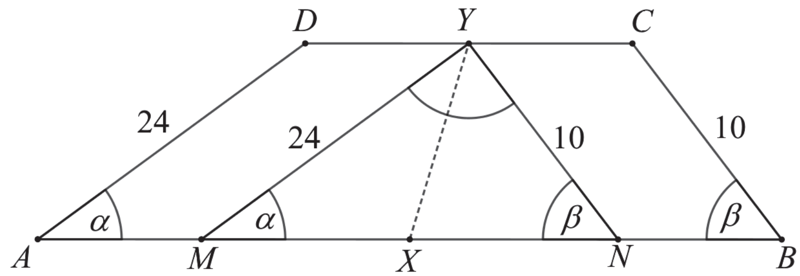
Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 10

Ramiona trapezu mają długości 24 i 10. Kąty między ramionami i dłuższą podstawą trapezu mają odpowiednio miary α oraz β, przy czym $\alpha+\beta=90°$. Wyznacz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

Oznaczmy *A*, *B*, *C*, *D* - wierzchołki trapezu; *X*, *Y* – środki podstaw (jak na rysunku).



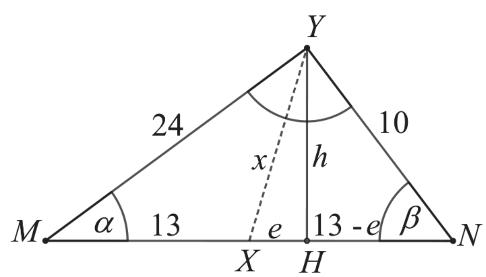
Wyznaczmy punkty *M* i *N* na podstawie *AB* tak, by odcinki *MY* oraz *AD* i *NY* oraz *CB* były odpowiednio równoległe.
Trójkąt *MNY* jest prostokątny, bo dwa jego kąty mają miary α oraz β (z równoległości).
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *MNY* wiadomo, że *MN* = 26.
Punkt *X* jest środkiem boku *AB*, ale jest też środkiem odcinka *MN*, czyli przeciwprostokątnej trójkąta *MNY*.

Dalsze rozumowanie – I sposób:
Środek przeciwprostokątnej jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie *MNY*.

Szukana odległość *XY* jest zatem promieniem tego okręgu, czyli $XY=\frac{1}{2}MN=13$.

Odcinek łączący środki podstaw trapezu ma długość 13.

Dalsze rozumowanie – II sposób:



Oznaczmy odcinki h, e, x jak na rysunku (*h* - wysokość trójkąta *MNY*)
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *MHY*, *NHY* i *XHY*:

$$\begin{cases} h^2+(13+e)^2=576 \\ h^2+(13-e)^2=100 \\ h^2+e^2=x^2 \end{cases}$$

Dodając stronami dwa pierwsze równania uzyskujemy:

$$2h^2+2e^2+338=676$$

Czyli $x^2=h^2+e^2=169$, więc $x = 13$.
Odcinek łączący środki podstaw trapezu ma długość 13.

Punktacja zadania 10

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń zauważył, że ramiona (lub odcinki do nich równoległe) trapezu są prostopadłe

2 pkt – został dokonany postęp konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń zauważył trójkąt prostokątny MNY

3 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania
Przykłady:

- uczeń obliczył długość odcinka MN
- uczeń zauważył, że środek odcinka MN jest jednocześnie środkiem podstawy AB - czyli że szukany w zadaniu odcinek jest środkową trójkąta MNY (nie musi używać pojęcia środkowej)

4 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń obliczył długość odcinka MN oraz zauważył, że środek odcinka MN jest jednocześnie środkiem podstawy AB

5 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki, błędy rachunkowe albo zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń wskazał poprawny sposób obliczenia szukanego odcinka jako promienia okręgu opisanego
- uczeń poprawnie rozpisał równości wynikające z twierdzenia Pitagorasa prowadzące do rozwiązania zadania
- uczeń obliczył szukaną długość popełniając błąd rachunkowy

6 pkt – zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 11

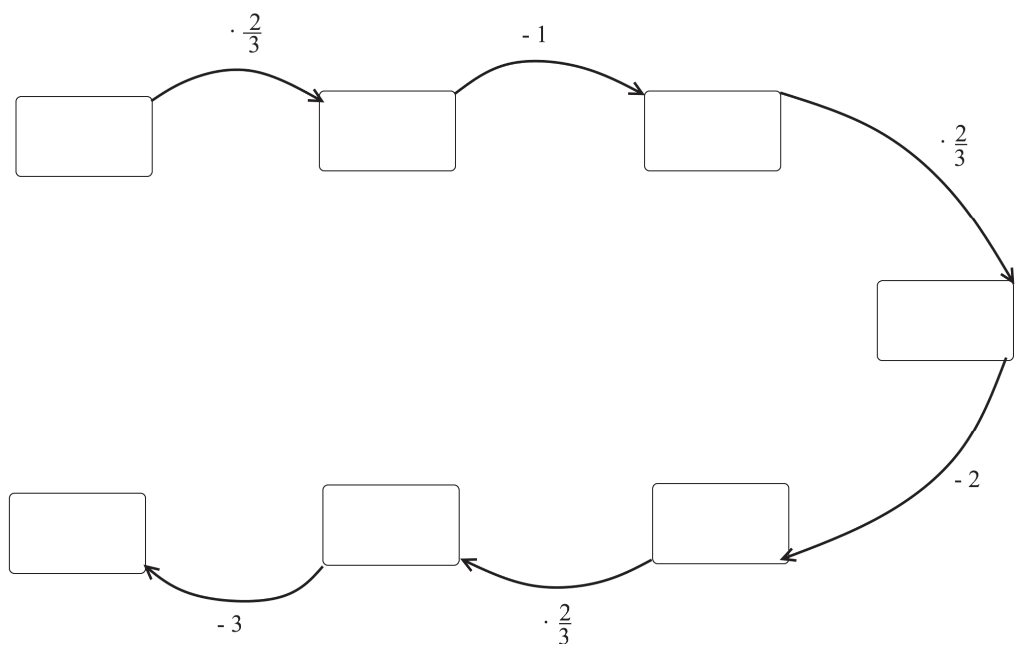
Bogacz zostawił spadek dla piątki swoich dzieci - worek pełen złotych monet. Jego przyjaciel zarządzający testamentem wypłacał każdemu należną sumę po osiągnięciu pełnoletniości:

- Najstarsza córka zgodnie z wolą ojca otrzymała $\frac{1}{3}$ wszystkich monet. Z pozostałej sumy przyjaciel wziął 1 monetę jako wynagrodzenie za swoją pracę.
- Dwa lata później pełnoletniość osiągnął syn, który otrzymał $\frac{1}{3}$ liczby monet pozostałych w worku. Z pozostałej sumy przyjaciel pobrał dla siebie 2 monety.
- Po kolejnym roku druga córka otrzymała $\frac{1}{3}$ pozostałych monet. Wynagrodzenie przyjaciela wyniosło tym razem 3 monety.
- W końcu po spadek stawiła się para najmłodszych bliźniaków. Każdy otrzymał po $\frac{1}{3}$ monet z worka, a pozostałe 7 monet zostało dla zarządzającego spadkiem.

Ile monet pozostawił bogacz w spadku?

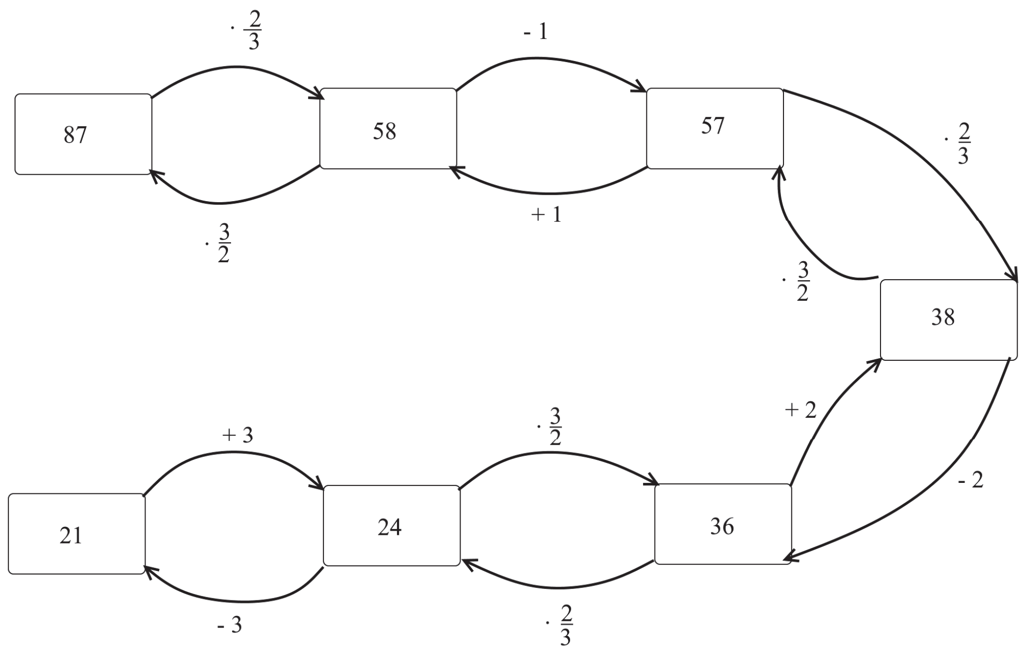
I sposób:

Przedstawmy za pomocą grafu, jak zmieniała się liczba monet pozostałych w worku:



Przed rozdaniem spadku dla bliźniaków w worku było 21 monet (bo 7 monet które dostał zarządzający stanowiło $\frac{1}{3}$ zawartości worka w tym momencie).

Możemy zatem wypełnić kolejne pola grafu zaczynając od ostatniego:



W spadku bogacz pozostawił 87 monet.
Zamiast rysować graf, można całą sytuację opisać za pomocą odpowiednich komentarzy i policzyć wszystko analizując *od końca* zmianę liczby monet w worku.

II sposób:
Oznaczmy jako x szukaną liczbę monet.
Przeanalizujmy, co działo się ze skarbem:

- starsza córka otrzymała $\frac{1}{3}x$ monet, 1 monetę zabrał zarządzający
- po obdarowaniu starszej córki w worku zostało $\frac{2}{3}x-1$ monet
- syn otrzymał $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x-1\right)$ monet, 2 monety dostał zarządzający
- po otrzymaniu spadku przez syna w skarbcu zostało $\frac{4}{9}x-\frac{8}{3}$ monet
- druga córka otrzymała $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}x-\frac{8}{3}\right)$ monet, a zarządca 3 monety
- po wypłacie dla drugiej córki w worku ostało $\frac{8}{27}x-\frac{43}{9}$ monet
- po $\frac{1}{3}$ z pozostałych monet dostał każdy z bliźniaków, zarządcy została więc również $\frac{1}{3}$ pozostałych monet

Możemy zatem ułożyć równanie:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}x-\frac{43}{9}\right)=7$$

którego jedynym rozwiązaniem jest $x = 87$.
Spadek składał się z 87 złotych monet.

Punktacja zadania 11

Rozwiązanie składa się z 3 etapów.
Punkty za etap I i II przyznawane są niezależnie.

I etap (3 punkty) – opisanie za pomocą wyrażeń algebraicznych, grafu lub w inny sposób sytuacji podanej w zadaniu
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń poprawnie ustalił, ile monet pozostanie w worku po odejściu starszej córki i wypłacie monety dla zarządcy (np. za pomocą odpowiedniego wyrażenia algebraicznego lub w grafie)

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub uczeń popełnił błędy rachunkowe
Przykłady:

- uczeń poprawnie ustalił, ile monet będzie w worku po otrzymaniu spadku przez dwójkę najstarszych dzieci i po opłaceniu zarządcy
- uczeń ustalił (np. za pomocą wyrażenia algebraicznego) liczbę monet, które zostały po otrzymaniu spadku przez trójkę najstarszych dzieci i po opłaceniu zarządcy, ale popełnił jeden błąd rachunkowy

3 pkt – poprawne rozwiązanie

- uczeń (np. za pomocą grafu bądź wyrażenia algebraicznego) ustalił zależność między początkową wartością spadku a liczbą monet, które zostały po otrzymaniu spadku przez trójkę najstarszych dzieci z uwzględnieniem wynagrodzenia zarządzającego spadkiem

II etap (1 punkt) – zauważenie, po ile monet dostał każdy z bliźniaków (albo ile zostało po obdarowaniu młodszej córki)
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – poprawne rozwiązanie
Przykłady:

- uczeń zauważył, że każdy z bliźniaków dostał po 7 monet
- uczeń zauważył, że po wypłacie dla drugiej córki w worku jest 21 monet

III etap (2 punkty) - ustalenie wielkości spadku (punkty możliwe do uzyskania tylko po poprawnym wykonaniu etapów I i II)
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie
Przykłady:

- uczeń zapisał poprawne równanie pozwalające obliczyć liczbę monet
- uczeń przeprowadził poprawną analizę sytuacji *od końca* (np. na grafie lub z pomocą odpowiednich komentarzy), popełniając przy tym błąd rachunkowy

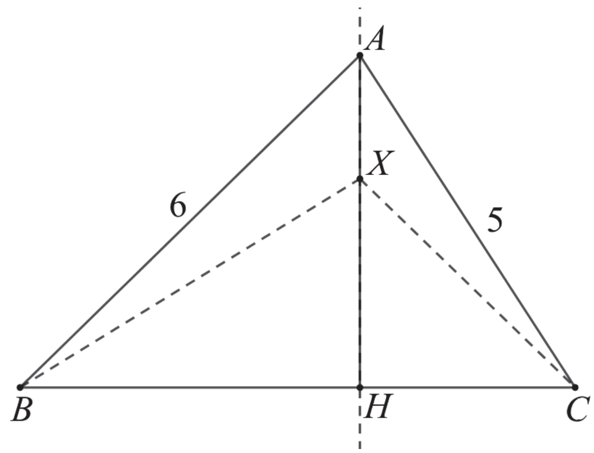
2 pkt – poprawne rozwiązanie

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów

Rozwiązanie zadania 12

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 6$, $BC = 7$, $CA = 5$. Odcinek AH jest jedną z wysokości tego trójkąta. Udowodnij, że dla każdego punktu X leżącego na prostej AH wyrażenie $BX^2 - CX^2$ przyjmuje stałą wartość. Podaj tę wartość.



Zauważmy, że (dla $X \neq H$) trójkąty BHX i CHX są prostokątne.
Z twierdzenia Pitagorasa:

$BX^2 = BH^2 + HX^2$

$CX^2 = CH^2 + HX^2$

Zatem $BX^2 - CX^2 = BH^2 - CH^2$ czyli jest to wielkość stała (nie zależy od wyboru X).
Jeżeli jako X weźmiemy punkt A:

$BA^2 - CA^2 = 36 - 25 = 11$

Zatem dla każdego punktu X należącego do prostej AH wyrażenie $BX^2 - CX^2$ przyjmuje wartość 11.

Punktacja zadania 12

Rozwiązanie składa się z 3 etapów.
Punkty za etap I i II przyznawane są niezależnie.

I etap (3 punkty) – wykazanie, że wartość $BX^2 - CX^2$ jest stała
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania

- uczeń zauważył, że trójkąty *BHX* i *CHX* są prostokątne

2 pkt – został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania

- uczeń zapisał twierdzenie Pitagorasa w trójkątach *BHX* i *CHX* wyliczając BX^2 oraz CX^2

3 pkt – poprawne rozwiązanie I etapu

- uczeń obliczył, że $BX^2 - CX^2 = BH^2 - CH^2$ (otrzymał wartość niezależną od *X*)

II etap (1 punkt) – obliczenie wartości dla $X = A$
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – poprawne rozwiązanie

- uczeń obliczył, że $BA^2 - CA^2 = 11$

III etap (2 punkty) – wykazanie, że wyrażenie przyjmuje zawsze wartość 11 (punkty możliwe do uzyskania tylko po poprawnym wykonaniu etapów I i II)
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu
1 pkt – zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie

- uczeń zauważył, że punkt A leży na prostej AH, więc $BA^2 - CA^2 = BH^2 - CH^2$ (stała z I etapu)

2 pkt – poprawne rozwiązanie

- uczeń wykazał, że szukana wartość wynosi zawsze 11

Uwaga:

- za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów