SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Klucz odpowiedzi				
		A	B	C	D	E
1.	2	X				
2.	2				X	
3.	2		X			
4.	2			X		
5.	2		X			
6.	2	X				
7.	3			X		
8.	3				X	
9.	3				X	
10.	3	X				
11.	3		X			
12.	3		X			

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania zamknięte: **30**

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

1. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie poprawnie alternatywnym sposobem, otrzymuje pełną liczbę punktów.

2. Jeśli uczeń popełnia błędy rachunkowe, ale **sposób** rozwiązania zadania jest w całości poprawny, rozwiązanie konsekwentnie doprowadzone do końca, a błąd nie powoduje znacznego uproszczenia zadania, to uczeń traci tylko 1 punkt za zadanie (bez względu na etap, na którym błąd został popełniony).

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania otwarte: **30**

ZADANIE 13. **10p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>
a) 6
b) 2^{22}
c) I FAŁSZ
II PRAWDA
III PRAWDA
d) dowód
</td><td>
<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>
a) 6
b) 2^{22}
c) I FAŁSZ II PRAWDA III PRAWDA
d) Liczbę postaci $n!$ rozpisujemy zgodnie z definicją:
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$
Zauważamy, że iloczyn liczb $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-4) \cdot (n-3)$ można zapisać jako $(n-3)!$, stąd $n! = (n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.
Wnioskujemy, że dzieląc $n!$ przez $(n-3)!$, otrzymujemy iloraz $(n-2)(n-1)n$ będący iloczynem liczb naturalnych. Iloraz ten jest więc liczbą naturalną, co prowadzi do wniosku, że liczba postaci $n!$ jest podzielna przez $(n-3)!$. Iloraz z postaci iloczynowej zmieniamy w sumę algebraiczną:
$$(n-2) \cdot (n-1) \cdot n = (n^2 - 3n + 2) \cdot n = n^3 - 3n^2 + 2n$$
<u>Schemat punktowania:</u>
Podpunkt a)
2 punkty
Podanie poprawnej odpowiedzi (6).
1 punkt
Poprawna metoda znalezienia najwyższej potęgi liczby 10 będącej dzielnikiem liczby 25!
0 punktów
Podanie błędnej odpowiedzi lub brak odpowiedzi.
Podpunkt b)
2 punkty
Podanie poprawnej odpowiedzi (2^{22}).
1 punkt
Poprawna metoda znalezienia najwyższej potęgi liczby 2 będącej dzielnikiem liczby 25!
0 punktów
Podanie błędnej odpowiedzi lub brak odpowiedzi.
Podpunkt c)
3 punkty
Poprawne określenie prawdziwości trzech zdań.
2 punkty
Poprawne określenie prawdziwości dwóch z trzech zdań.
1 punkt
Poprawne określenie prawdziwości jednego z trzech zdań.
</td></tr>
</table>

	Podpunkt **d)** **3 punkty** Wykazanie podzielności liczby $n!$ przez $(n-3)!$ oraz przedstawienie otrzymanego ilorazu w formie podanej w poleceniu $(n^3 - 3n^2 + 2n)$ **2 punkty** Poprawna metoda wykazania podzielności liczby $n!$ przez $(n-3)!$ i otrzymanie ilorazu zapisanego w postaci iloczynu trzech czynników $(n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ **1 punkt** Zapisanie $n! = (n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ **0 punktów** Brak dowodu, błędne rozumowanie lub pokazanie własności na przykładzie wybranej jednej lub kilku wartości liczbowych n. **Uwaga:** Jeśli w podpunkcie a) lub b) uczeń zapisze poprawną odpowiedź, ale nie zapisze pełnego rozumowania i obliczeń prowadzących do odpowiedzi, to za każdy z podpunktów a) lub b) otrzymuje **2 punkty.**

ZADANIE 14. **11p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>

I

a) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

b) π

II

a) dowód

b) $2\sqrt{3}$

III

$30\pi - 9\sqrt{3}$

</td><td>

<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>

I

a) Aby obliczyć pole trójkąta APB, obliczamy najpierw długość przyprostokątnej AP. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AP|^2 + 3^2 = 6^2$$
$$|AP|^2 = 27$$
$$|AP| = 3\sqrt{3}$$

Stąd obliczamy pole trójkąta APB

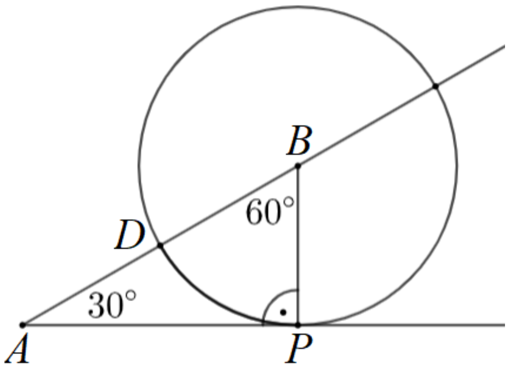
$P_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

b) Zaznaczamy punkt D, będący punktem przecięcia okręgu O z bokiem AB trójkąta APB. Aby obliczyć długość łuku DP, obliczamy miarę kąta $\sphericalangle DBP$:

$$|\sphericalangle DBP| = 180° - 30° - 90° = 60°$$

Wstawiamy dane do wzoru na długość łuku:

$L_{DP} = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 3 = \pi$



II

a) Obliczamy miarę kąta $\sphericalangle ATB$:

$|\sphericalangle ATB| = 180° - 90° - 30° = 60°$

Zauważamy, że trójkąt STB jest równoramienny, ponieważ BS i BT to promienie okręgu O, więc $|\sphericalangle TSB| = |\sphericalangle STB| = |\sphericalangle ATB| = 60°$. Stąd miara trzeciego kąta trójkąta STB to:

$$|\sphericalangle TBS| = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$$

Wszystkie trzy kąty trójkąta STB są równej miary, więc jest on równoboczny.

b) Korzystamy z faktu, że trójkąt ATB jest połową trójkąta równobocznego o wysokości równej $|AB|$ i boku $2r$ lub z własności trójkąta o miarach kątów $30°, 60°, 90°$ i otrzymujemy:

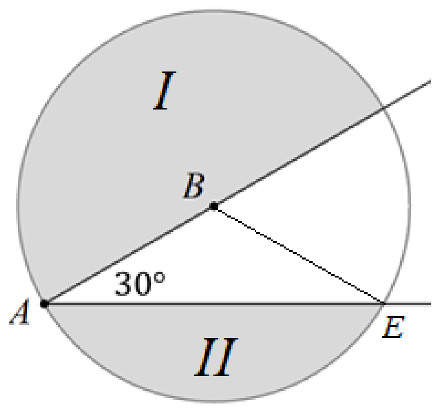
$$6 = r\sqrt{3}$$
$$r = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

III

Zacieniowaną figurę dzielimy na dwie części I i II, oznaczone na rysunku. Prowadzimy promień do punktu E przecięcia okręgu z ramieniem kąta.

Figura I to połowa koła o promieniu 6.

$P_I = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 6^2 = 18\pi$



Pole figury II możemy obliczyć odejmując pole trójkąta BAE od pola mniejszego z wycinków koła wyznaczonego przez promienie BA i BE.

Pole trójkąta BAE jest dwukrotnie większe od pola trójkąta prostokątnego, obliczonego w podpunkcie I.a), tj.

$P_{BAE} = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

</td></tr>
</table>

Trójkąt BAE jest równoramienny, więc miara kąta ABE wynosi $180° - 2 \cdot 30° = 120°$.

Obliczamy pole figury II:
$P_{II} = \frac{|\sphericalangle ABE|}{360°} \cdot \pi r^2 - P_{BAE} = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 - 9\sqrt{3} = 12\pi - 9\sqrt{3}$

Pole zacienionej figury to $P_I + P_{II} = 18\pi + 12\pi - 9\sqrt{3} = 30\pi - 9\sqrt{3}$

Schemat punktowania:

Podpunkt **I. a)**

2 punkty
Poprawne obliczenie pola trójkąta APB $\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

1 punkt
Poprawna metoda obliczenia pola trójkąta APB
lub
Poprawne obliczenie długości przyprostokątnej AP

0 punktów
Brak rozwiązania lub błędne rozwiązanie

Podpunkt **I. b)**

2 punkty
Poprawne obliczenie długości łuku $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

1 punkt
Poprawna metoda obliczenia długości łuku

0 punktów
Brak rozwiązania lub błędne rozwiązanie

Podpunkt **II. a)**

2 punkty
Wykazanie, że trójkąt STB jest trójkątem równobocznym

1 punkt
Wykazanie, że trójkąt STB jest trójkątem równoramiennym

0 punktów
Błędne rozumowanie lub założenie tezy lub obliczenie długości boków trójkąta dla wybranej wartości r

Podpunkt **II. b)**

2 punkty
Poprawne obliczenie długości promienia $(2\sqrt{3})$

1 punkt
Poprawna metoda obliczenia długości promienia

0 punktów
Brak rozwiązania lub błędne rozwiązanie

Podpunkt **III**

3 punkty
Poprawne obliczenie pola zacieniowanej figury $(30\pi - 9\sqrt{3})$

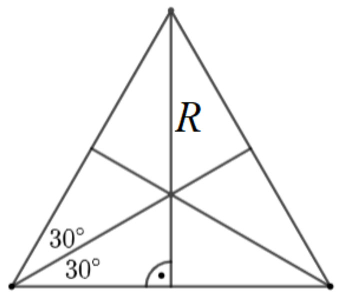
2 punkty
Poprawne metoda obliczenia pola zacieniowanej figury
lub
Poprawne obliczenie pola mniejszej części zacieniowanej figury $(12\pi - 9\sqrt{3})$
lub
Poprawne obliczenie białej części pola koła $(9\sqrt{3} + 6\pi)$

1 punkt
Poprawne obliczenie pola większej części zacieniowanej figury - półkola (18π)
lub
Poprawna metoda obliczenia pola mniejszej części zacieniowanej figury
lub
Poprawna metoda obliczenia pola nie zacieniowanej figury.

0 punktów
Brak rozwiązania lub błędne rozwiązanie

Uwaga:
Jeśli w podpunkcie I. a) uczeń błędnie obliczy pole trójkąta APB, a następnie w poprawny sposób użyje tego błędnego wyniku w podpunkcie III i przedstawi pełne rozwiązanie, to za podpunkt III uczeń otrzymuje 3 punkty.

ZADANIE 15. **9p**

Poprawna odpowiedź	Punktacja
a) $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ c) $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ d) $2\sqrt[3]{3}$	**<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>** a) $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) Jako że czworościan foremny jest ostrosłupem prawidłowym, spodek wysokości jest równooddalony od każdego z wierzchołków ściany, na której się znajduje. W przypadku podstawy będącej trójkątem równobocznym spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w punkcie przecięcia wysokości trójkąta. Wysokości te dzielą trójkąt na sześć przystających trójkątów prostokątnych o miarach kątów $30°, 60°, 90°$. Stąd wnioskujemy, że spodek wysokości ostrosłupa dzieli każdą z wysokości podstawy na dwie części będące w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka podstawy.  Stąd otrzymujemy: $R=\frac{2}{3}\cdot h=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ c) Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych R i H oraz przeciwprostokątnej a. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy: $R^2+H^2=a^2$ $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+H^2=a^2$ $H^2=a^2-\frac{a^2}{3}$ $H=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ d) Objętość V jednego czworościanu o krawędzi a można obliczyć ze wzoru: $V=\frac{1}{3}\cdot P_P\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{18}}{36}=\frac{a^3\cdot 3\sqrt{2}}{36}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ Układamy i rozwiązujemy równanie, by obliczyć długość krawędzi a. $10\sqrt{2}=5\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ $24\sqrt{2}=a^3\sqrt{2}$ $a^3=24$ $a=\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$ Stąd otrzymujemy, że długość krawędzi dziesięciościanu jest równa $2\sqrt[3]{3}$. **<u>Schemat punktowania:</u>** Podpunkt **I. a)** **1 punkt** Podanie poprawnego wzoru na wysokość h ($h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ lub równanie równoważne) **0 punktów** Brak odpowiedzi lub błędna odpowiedź

	Podpunkt **I. b)** **2 punkty** Podanie poprawnego wzoru na odległość R ($R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ lub równanie równoważne) **1 punkt** Poprawna metoda wyznaczenia wzoru na odległość R **0 punktów** Brak odpowiedzi lub błędna odpowiedź Podpunkt **I. c)** **2 punkty** Poprawne wyznaczenie wzoru na wysokość H czworościanu ($H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ lub równanie równoważne) **1 punkt** Poprawna metoda wyznaczenia wzoru na wysokość H czworościanu **0 punktów** Brak rozwiązania lub błędne rozwiązanie Podpunkt **II** **4 punkty** Poprawne obliczenie długości krawędzi dziesięciościanu $(2\sqrt[3]{3})$ **3 punkty** Ułożenie poprawnego równania z jedną niewiadomą prowadzącego do znalezienia długości krawędzi bryły **2 punkty** Zapisanie poprawnego wyrażenia przedstawiającego objętość czworościanu foremnego lub objętość rozważanego dziesięciościanu w zależności od długości krawędzi bryły **1 punkt** Poprawna metoda znalezienia wyrażenia przedstawiającego objętość czworościanu foremnego lub objętość rozważanego dziesięciościanu **0 punktów** Brak rozwiązania lub rozwiązanie błędne **Uwaga:** • Jeśli w podpunkcie I. a), I. b) lub I. c) uczeń uzyska błędną odpowiedź, a następnie skorzysta z tej błędnej odpowiedzi w kolejnych dalszych podpunktach, które rozwiąże poprawną metodą i doprowadzi do pełnego rozwiązania, to za te kolejne podpunkty uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.