KURATORIUM OŚWIATY
W KRAKOWIE

Kod ucznia

Miejsce na metryczkę ucznia

Małopolski Konkurs Matematyczny
dla uczniów szkół podstawowych województwa małopolskiego
Etap wojewódzki
Rok szkolny 2023/2024

Drogi Uczniu!

1. Przed Tobą zestaw 15 zadań konkursowych, za które łącznie możesz uzyskać 60 punktów.
2. Na rozwiązanie zestawu masz **120 minut**. Komisja konkursowa 15 minut przed końcem przypomni Ci o upływającym czasie.
3. Brudnopis nie podlega ocenie.
4. Nie podpisuj się imieniem i nazwiskiem, zakoduj pracę zgodnie z poleceniami Komisji Konkursowej.
5. Nie używaj korektora ani długopisu zmazywalnego – zadanie, w którym ich użyjesz nie będzie oceniane. Odpowiedzi udzielane przy użyciu ołówka nie będą oceniane.
6. Przekaż w depozyt członkom Komisji telefon komórkowy, jeśli go posiadasz przy sobie.
7. Staraj się, aby Twoja praca była czytelna. Pisz i rysuj wyraźnie, nie stosuj skrótów, zapisuj słowa w pełnym brzmieniu.
8. Stwierdzenie niesamodzielności pracy, korzystanie z kalkulatora lub przeszkadzanie innym spowoduje wykluczenie z udziału w konkursie.
9. Jeśli w swojej pracy zaznaczysz inną odpowiedź, a inną na karcie odpowiedzi, to odpowiedź z karty odpowiedzi jest uznawana za ostateczną i to ona zostanie oceniona.

Życzymy Ci satysfakcji z uczestnictwa w konkursie i powodzenia!

Organizatorzy Konkursu

Kod ucznia

Karta odpowiedzi

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Miejsce na odpowiedź					WYPEŁNIA KOMISJA
		A	B	C	D	E	Przyznane punkty
1.	2						
2.	2						
3.	2						
4.	2						
5.	2						
6.	2						
7.	3						
8.	3						
9.	3						
10.	3						
11.	3						
12.	3						
						Suma punktów za zadania zamknięte:	

Numer zadania	1. – 12.	13.	14.	15.	SUMA
Liczba punktów za zadanie	30	10	11	9	60
Uzyskane punkty					

Kody sprawdzających:

Informacje dla ucznia – zadania zamknięte

1. W zadaniach od **1.** do **6.** podane są 4 odpowiedzi: A, B, C, D. W zadaniach od **7.** do **12.** podanych jest 5 odpowiedzi: A, B, C, D, E. Wybierz **tylko jedną** odpowiedź i wpisz wyraźnie znak **X** w odpowiedniej kratce w tabeli na karcie odpowiedzi.
   Jeśli zaznaczysz błędną odpowiedź, otocz ją kółkiem i wpisz **X** w inną kratkę.
2. Pamiętaj o wypełnieniu karty odpowiedzi!
3. Ostatnie trzy strony tego arkusza są przeznaczone na brudnopis.

Zadanie 1. 2p

Liczby Mersenne'a to takie liczby naturalne, które można zapisać w postaci $2^n - 1$, gdzie n jest liczbą naturalną. Jeśli liczba Mersenne'a jest liczbą pierwszą, to wykładnik n w powyższym zapisie również jest liczbą pierwszą.
Ile jest liczb Mersenne'a mniejszych od 100, które są liczbami pierwszymi?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Zadanie 2. 2p

Sprzedawca n-krotnie (n jest liczbą naturalną) obniżył pierwotną cenę pewnego produktu o 25% tak, że ostateczna cena tego produktu stanowiła mniej niż 25% ceny pierwotnej. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość n?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Zadanie 3. 2p

Liczba $1 - \left||1-\pi| - 2\pi\right|$ jest równa

A. -3π **B.** $-\pi$ **C.** π **D.** $3\pi + 2$

Zadanie 4. 2p

Liczba całkowita y podzielona przez 3 daje iloraz całkowity x i resztę 1. Układem spełnionym przez dowolną parę liczb (x, y) opisaną w pierwszym zdaniu jest układ

A. $\begin{cases} y = 3(x+1) \\ y - 1 = 3x \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} y : 3 = x + 1 \\ y - 3x - 1 = 0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x + y = 4x + 1 \\ 6x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} y + x = 5 \\ y - x = 3 \end{cases}$

Zadanie 5. 2p

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są cztery punkty, będące kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Punkty te mają współrzędne: $A = (0,0)$, $B = (a, b)$, $C = (a - b, a + b)$ oraz $D = (-b, a)$, gdzie a i b są liczbami dodatnimi. Środek symetrii czworokąta $ABCD$

A. nie istnieje.

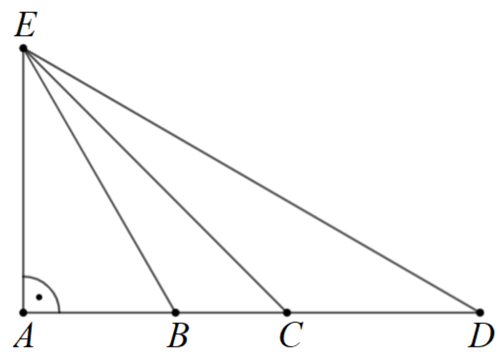
B. ma współrzędne $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}, \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$.

C. ma współrzędne $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

D. jest zawsze w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Informacja do zadań 6. i 7.

Na rysunku obok przedstawiono trójkąt prostokątny ADE, w którym kąt $\sphericalangle ADE$ ma miarę $30°$. Na boku AD zaznaczono punkty B i C tak, by $|\sphericalangle ABE| = 60°$ oraz $|\sphericalangle ACE| = 45°$.



Zadanie 6. 2p

Rozważ poniższe zdania:

I Trójkąty ADE oraz ABE są podobne.
II Punkt B leży na symetralnej odcinka ED.
III Punkt B leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle AED$, a punkt C leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle BED$.
IV Pole trójkąta ABE jest dwukrotnie mniejsze niż pole trójkąta BDE.

Które z powyższych zdań są prawdziwe?

A. Wszystkie zdania od I do IV.
B. Tylko zdanie I i III.
C. Tylko zdanie I, II i IV.
D. Tylko zdanie II, III i IV.

Zadanie 7. 3p

Jaki jest stosunek proporcjonalny długości odcinków AB, BC i CD?

A. $2 : 1 : 2$
B. $1 : \sqrt{3} : 3$
C. $1 : (\sqrt{3} - 1) : (3 - \sqrt{3})$
D. $\sqrt{2} : 1 : \sqrt{3}$
E. $1 : (\sqrt{2} - 1) : 2\sqrt{3}$

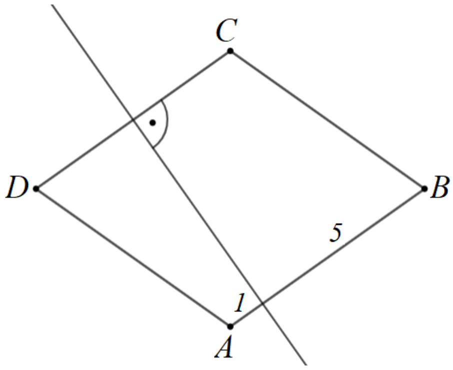
Zadanie 8. **3p**

Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych znajduje się w odległości 10 od punktu $(0, 0)$?

A. dwa
B. cztery
C. osiem
D. dwanaście
E. nieskończenie wiele

Zadanie 9. **3p**

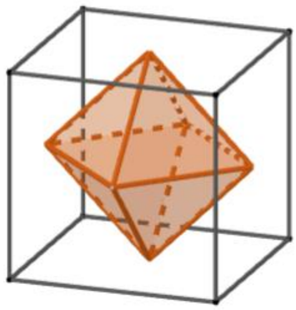
Romb $ABCD$ ma bok długości 6. Symetralna boku CD dzieli bok AB na odcinki długości 1 i 5, jak pokazano na rysunku obok.
Jaka jest długość przekątnej AC tego rombu?



A. 5
B. $4\sqrt{2}$
C. 6
D. $4\sqrt{3}$
E. $6\sqrt{2}$

Zadanie 10. **3p**

Na każdej ze ścian sześcianu o objętości 48 zaznaczono punkt przecięcia przekątnych danej ściany. Zaznaczone punkty połączono tak, że powstał ośmiościan foremny, widoczny na rysunku obok.



Objętość tego ośmiościanu jest równa

A. 8 **B.** 12 **C.** $12\sqrt{2}$ **D.** 16 **E.** 24

Zadanie 11. **3p**

Ze zbioru 20 kolejnych liczb naturalnych wylosowano dwie różne liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich suma jest parzysta?

A. $\frac{9}{20}$ **B.** $\frac{9}{19}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$ **E.** $\frac{3}{4}$

Zadanie 12. **3p**

Ile jest liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 1?

A. 81 **B.** 82 **C.** 83 **D.** 90 **E.** 91

Informacje dla ucznia – zadania otwarte

1. Rozwiązania i odpowiedzi do zadań otwartych od **13.** do **15.** zapisz czytelnie w miejscu do tego przeznaczonym.
2. Wpisz swój kod ucznia w miejsca na górze stron 6, 8 i 10.
3. Pamiętaj o zapisaniu wszystkich obliczeń i odpowiedzi. Błędne obliczenia przekreślaj i zapisuj nowe.

Kod ucznia

Zadanie 13. 10p

Iloczyn wszystkich dodatnich liczb naturalnych nie większych niż n można zapisać jako $n!$, co czytamy jako „n silnia”, gdzie n jest liczbą naturalną.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Przykładowo: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Osobno określa się, że $0!$ jest równe 1.

a) **(2p)** Podaj, ile zer występuje na końcu zapisu liczby $25!$.

b) **(2p)** Podaj, jaka jest najwyższa potęga liczby 2, przez którą dzieli się liczba $25!$.

c) **(3p)** Ustal prawdziwość poniższych zdań. Wpisz PRAWDA lub FAŁSZ w wyznaczone miejsca.

I Każda liczba postaci $n!$ posiada dokładnie n dzielników naturalnych. ……………………..

II Istnieją jedynie dwie nieparzyste liczby postaci $n!$. ……………………..

III Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$. ……………………..

d) **(3p)** Udowodnij, że dla $n \geq 3$ liczba postaci $n!$ jest podzielna przez $(n-3)!$, a otrzymany iloraz można zapisać jako $n^3 - 3n^2 + 2n$.

Rozwiązanie:

Kod ucznia

Zadanie 14. 11p

Dany jest kąt $\sphericalangle BAC$ o mierze równej $30°$, gdzie $|AB| = 6$ oraz okrąg O o środku w punkcie B oraz o dowolnym promieniu r.

I. Jeśli długość promienia r wynosi 3, to okrąg O ma jeden punkt wspólny P z ramieniem AC, a kąt $\sphericalangle APB$ jest prosty.

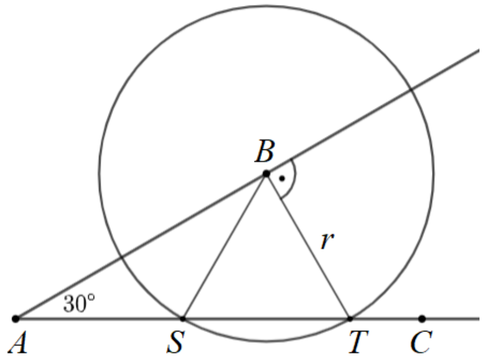
a) **(2p)** Oblicz pole trójkąta APB. Zapisz obliczenia.

b) **(2p)** Okrąg O przecina odcinek AB w punkcie D. Oblicz długość mniejszego łuku DP. Zapisz obliczenia.

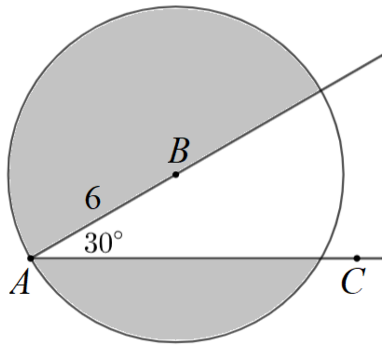
II. Dla pewnego promienia r okrąg O przecina ramię AC w dwóch punktach S i T, gdzie $|AS| < |AT|$ tak, że trójkąt ATB jest prostokątny. Sytuację przedstawiono na rysunku obok.

a) **(2p)** Udowodnij, że trójkąt STB jest równoboczny.

b) **(2p)** Znajdź długość promienia r. Zapisz obliczenia.



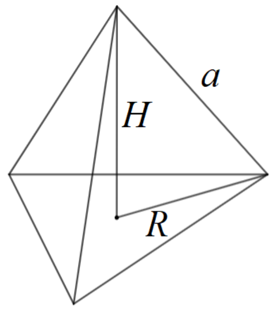
III. **(3p)** Niech długość promienia r okręgu O wynosi 6. Oblicz pole zacieniowanej figury przedstawionej na rysunku obok. Zapisz obliczenia.



Rozwiązanie:

Kod ucznia

Zadanie 15. 9p



I. Czworościan foremny ma krawędzie o długości a.

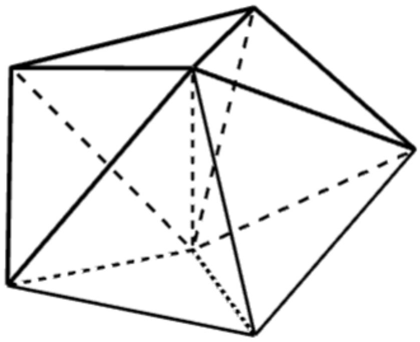
a) **(1p)** Zapisz wzór na wysokość h dowolnej ściany czworościanu foremnego.

b) **(2p)** Zapisz wzór na odległość R pomiędzy wierzchołkiem ściany a spodkiem wysokości czworościanu foremnego znajdującym się na tej ścianie. Wzór wyraź w zależności od a.

c) **(2p)** Wyznacz wzór na wysokość H czworościanu foremnego. Wzór wyraź w zależności od a.

II. **(4p)** Dany jest dziesięciościan zbudowany z pięciu czworościanów foremnych. Bryłę przedstawiono na rysunku obok.

Objętość danego dziesięciościanu jest równa $10\sqrt{2}$. Oblicz długość krawędzi tej bryły. Zapisz obliczenia.



Rozwiązanie:

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.

BRUDNOPIS

Pamiętaj! Wszelkie zapisy obliczeń i rozwiązań na tej stronie nie podlegają ocenie.