SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Klucz odpowiedzi				
		A	B	C	D	E
1.	2			**X**		
2.	2	**X**				
3.	2				**X**	
4.	2			**X**		
5.	2	**X**				
6.	2			**X**		
7.	3		**X**			
8.	3					**X**
9.	3				**X**	
10.	3					**X**
11.	3	**X**				
12.	3		**X**			

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania zamknięte: **30**

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

1. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie poprawnie alternatywnym sposobem, otrzymuje pełną liczbę punktów.

2. Jeśli uczeń popełnia błędy rachunkowe, ale **sposób** rozwiązania zadania jest w całości poprawny, rozwiązanie konsekwentnie doprowadzone do końca, a błąd nie powoduje znacznego uproszczenia zadania, to uczeń traci tylko 1 punkt za zadanie (bez względu na etap, na którym błąd został popełniony).

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania otwarte: **30**

ZADANIE 13. **10p**

<table>
<tr><th>Poprawna odpowiedź</th><th>Punktacja</th></tr>
<tr><td>a) 3
b)
I. $\frac{4}{5}$
II. $\frac{4}{9}$
III. $\frac{1}{2}$
c) dowód</td><td>

Przykładowe rozwiązanie:

a) 3 skarpety

b) I.
Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru będzie równe prawdopodobieństwu wylosowania dwóch skarpet czarnych, ponieważ nie można wylosować dwóch skarpet białych.
Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet czarnych:
$$\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{5}$$
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania z szuflady A dwóch skarpet tego samego koloru jest równe $\frac{4}{5}$.

II.
Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru będzie sumą prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet białych i prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet czarnych.
Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet białych:
$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$
Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet czarnych:
$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$
Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru:
$$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania z szuflady B dwóch skarpet tego samego koloru jest równe $\frac{4}{9}$.

III.
Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet białych, pierwszej z szuflady A, drugiej z szuflady B:
$$\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{20}$$
Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet czarnych, pierwszej z szuflady A, drugiej z szuflady B:
$$\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{9}{20}$$
Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru:
$$\frac{1}{20}+\frac{9}{20}=\frac{1}{2}$$
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru, pierwszej z szuflady A, drugiej z szuflady B, jest równe $\frac{1}{2}$.

c) Obecnie w szufladzie A jest $(a+1)$ białych skarpet i 9 czarnych skarpet, w sumie $(a+10)$ skarpet.
Zapisujemy wyrażenie opisujące prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet białych, pierwszej z szuflady A, drugiej z szuflady B:
$$\frac{a+1}{a+10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{a+1}{2(a+10)}$$
Zapisujemy wyrażenie opisujące prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet czarnych, pierwszej z szuflady A, drugiej z szuflady B:
$$\frac{9}{a+10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{9}{2(a+10)}$$
Zapisujemy wyrażenie opisujące prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru:
$$\frac{a+1}{2(a+10)}+\frac{9}{2(a+10)}=\frac{a+10}{2(a+10)}=\frac{1}{2}$$
</td></tr>
</table>

Otrzymana wartość prawdopodobieństwa jest równa $\frac{1}{2}$ bez względu na wartość a.

<u>Schemat punktowania:</u>

Podpunkt (a)

1 punkt
podanie poprawnej odpowiedzi (3)
0 punktów
błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi

Podpunkt (b) I

2 punkty
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru, poprawne obliczenia i podanie poprawnej odpowiedzi $\left(\frac{4}{5}\right)$
1 punkt
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru
0 punktów
błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (b) II

2 punkty
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru, poprawne obliczenia i podanie poprawnej odpowiedzi $\left(\frac{4}{9}\right)$
1 punkt
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet białych
lub
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet czarnych
0 punktów
błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (b) III

2 punkty
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru, poprawne obliczenia i podanie poprawnej odpowiedzi $\left(\frac{1}{2}\right)$
1 punkt
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet białych
lub
poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa wylosowania dwóch skarpet czarnych
0 punktów
błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (c)

3 punkty
Pełny poprawny dowód
2 punkt
Zapisanie poprawnego wyrażenia algebraicznego przedstawiającego prawdopodobieństwo wylosowania dwóch skarpet tego samego koloru
1 punkt
Zapisanie poprawnego wyrażenia na prawdopodobieństwo wylosowania jednej białej skarpety z szuflady A
0 punktów
Błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

	Uwaga: • Jeśli uczeń podał poprawną odpowiedź do podpunktu (a) w części strony zatytułowanej „Rozwiązanie”, a nie w miejscu na to wyznaczonym, otrzymuje 1 punkt za podpunkt (a). • Jeśli w podpunkcie (c) uczeń oblicza prawdopodobieństwo jedynie dla konkretnych wartości liczby a, to za swoje rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

ZADANIE 14. **10p**

Poprawna odpowiedź	Punktacja
a) 4 b) dowód c) liczby nieparzyste większe od 2 d) $12n-16$ e) $n=7$	**<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>** a) 4 b) Sposób I: Z kwadratu złożonego z n^2 kwadratów o wymiarach 1×1 usuwamy kwadrat o wymiarach $(n-2)\times(n-2)$. Zapisujemy wyrażenie opisujące pole powierzchni figury R_n: $n^2-(n-2)^2=n^2-(n^2-4n+4)=n^2-n^2+4n-4=4(n-1)$ Liczba $(n-1)$ jest naturalna, więc pole powierzchni figury R_n jest podzielne przez 4. Sposób II: Figura R_n składa się z czterech kwadratów narożnych, każdy o polu równym 1 i czterech prostokątów o wymiarach $1\times(n-2)$, każdy o polu równym $(n-2)$. Stąd zapisujemy wyrażenie opisujące pole powierzchni figury R_n: $4\cdot 1+4\cdot(n-2)=4(1+n-2)=4(n-1)$ Liczba $(n-1)$ jest naturalna, więc pole powierzchni figury R_n jest podzielne przez 4. c) Zapisujemy wyrażenie przedstawiające obwód ramy R_n: $4n+4(n-2)=4n+4n-8=8n-8=8(n-1)$ Aby wyrażenie $8(n-1)$ było podzielnie przez 16, $(n-1)$ musi być podzielne przez 2, czyli n musi być liczbą nieparzystą większą od 2, ponieważ obwód musi być dodatni. Odpowiedź: Zadany warunek podzielności jest spełniony, jeśli n to liczba nieparzysta większa od 2. d) Sześcianów o wymiarach $1\times 1\times 1$, które połączono trzema ścianami z innymi sześcianami, jest 8 – na rogach bryły B_n. Sześcianów o wymiarach $1\times 1\times 1$, które połączono dwiema ścianami z innymi sześcianami, jest $(n-2)$ wzdłuż każdej z 12 krawędzi. Dodajemy te dwie wartości, upraszczamy wyrażenie i podajemy odpowiedź: $8+12(n-2)=8+12n-24=12n-16$ Odpowiedź: $12n-16$ e) Sześć ścian bryły jest ramą R_n o powierzchni wyrażonej wzorem $4(n-1)$. Pozostałe 24 ściany są przystającymi prostokątami o wymiarach $1\times(n-2)$. Zapisujemy wyrażenie na pole powierzchni całkowitej bryły B_n: $6\cdot 4(n-1)+24\cdot(n-2)=24n-24+24n-48=48n-72$ Układamy i rozwiązujemy równanie: $48n-72=264$ $n=7$ Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej bryły B_n jest równe 264 dla n równego 7. **<u>Schemat punktowania:</u>** **Podpunkt (a)** **1 punkt** podanie poprawnej odpowiedzi (4) **0 punktów** błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi **Podpunkt (b)** **2 punkty** poprawne uzasadnienie, że dla dowolnego $n>2$ wartość wyrażenia jest liczbą podzielną przez 4

	1 punkt zapisanie poprawnego wyrażenia algebraicznego zmiennej n opisującego pole powierzchni ramy R_n **0 punktów** błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania **Podpunkt (c)** **2 punkty** zapisanie poprawnej odpowiedzi wraz z jej poprawnym uzasadnieniem **1 punkt** zapisanie poprawnego wyrażenia algebraicznego zmiennej n opisującego obwód ramy R_n **0 punktów** błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania **Podpunkt (d)** **2 punkty** zapisanie poprawnego wyrażenia algebraicznego zmiennej n opisującego szukaną liczbę sześcianów po redukcji wyrazów podobnych $(12n - 16)$ **1 punkt** poprawna metoda znalezienia wyrażenia algebraicznego zmiennej n opisującego szukaną liczbę sześcianów **0 punktów** błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania **Podpunkt (e)** **3 punkty** poprawna metoda znalezienia szukanej wartości n, poprawne obliczenia i podanie poprawnej odpowiedzi (7) **2 punkty** poprawna metoda znalezienia szukanej wartości n **1 punkt** poprawna metoda znalezienia wyrażenia przedstawiającego pole powierzchni całkowitej bryły B_n **0 punktów** błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania **Uwaga:** • Jeśli uczeń podał pełną i poprawną odpowiedź do podpunktu (a) lub do podpunktu (d) w części strony zatytułowanej „Rozwiązanie”, a nie w miejscu na to wyznaczonym, otrzymuje odpowiednio 1 punkt za podpunkt (a) lub 2 punkty za podpunkt (b). • Jeśli w podpunkcie (c) uczeń podaje odpowiedź „liczby nieparzyste” wraz z poprawnym uzasadnieniem, to otrzymuje za ten podpunkt 2 punkty.

ZADANIE 15. **10p**

Poprawna odpowiedź	Punktacja
a) $4(\sqrt{3}-1)$ cm^2 b) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}+\frac{2}{3}$ c) $2(2\sqrt{3}-1)$ cm d) $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ cm	**<u>Przykładowe rozwiązanie:</u>** a) Obliczamy wysokość w trójkącie ACD używając twierdzenia Pitagorasa, wzoru na wysokość trójkąta równobocznego lub zależności pomiędzy długościami boków w trójkącie o miarach kątów $30°, 60°, 90°$ i otrzymujemy $2\sqrt{3}$ cm. Wysokość trójkąta ACB jest połową przeciwprostokątnej i jest równa 2 cm. Pole czworokąta $ABCD$ obliczymy odejmując pole trójkąta równoramiennego prostokątnego o przeciwprostokątnej 4 cm od pola trójkąta równobocznego o boku 4 cm: $P_{ABCD}=\frac{4\cdot 2\sqrt{3}}{2}-\frac{4\cdot 2}{2}=4\sqrt{3}-4=4(\sqrt{3}-1)$ [cm^2] Odpowiedź: Pole czworokąta jest równe $4(\sqrt{3}-1)$ cm^2. b) Obliczamy obwód O_I dwunastokąta I, który składa się z 4 długości dłuższego boku czworokąta $ABCD$ oraz 8 długości krótszego boku czworokąta $ABCD$: $4\cdot 4+8\cdot 2\sqrt{2}=16+16\sqrt{2}$ [cm] Obliczamy obwód O_{II} dwunastokąta II, który składa się z 12 długości krótszego boku czworokąta $ABCD$: $12\cdot 2\sqrt{2}=24\sqrt{2}$ [cm] Obliczamy stosunek obwodów: $\frac{O_I}{O_{II}}=\frac{16+16\sqrt{2}}{24\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+4}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}+2}{3}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{3}$ Odpowiedź: Stosunek obwodu dwunastokąta I do obwodu dwunastokąta II jest równy $\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}$. c) Długość a jest sumą wysokości trójkąta równobocznego o boku długości 4 cm oraz długością przekątnej BD czworokąta $ABCD$. Obliczamy $\|BD\|$: $\|BD\|=2\sqrt{3}-2$ [cm] Stąd, $a=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2=4\sqrt{3}-2=2(2\sqrt{3}-1)$ [cm] Odpowiedź: Długość a jest równa $2(2\sqrt{3}-1)$ cm. d) Sposób I: Długość b jest równa długości najkrótszej przekątnej dwunastokąta II. Jeśli zaznaczymy wszystkie sześć najkrótszych przekątnych tego dwunastokąta to utworzą one sześciokąt foremny. Długość b jest więc równa długości przekątnej BD czworokąta $ABCD$, stąd $b=2\sqrt{3}-2$ [cm] Sposób II: Czworokąt $ABCD$ rozcinamy wzdłuż przekątnej BD, a następnie otrzymane trójkąty przystające ABD i CDB łączymy najdłuższym bokiem, otrzymując deltoid o dłuższej przekątnej długości 4 cm i krótszej przekątnej długości b. Pole otrzymanego deltoidu jest równe polu czworokąta $ABCD$. Stąd, równanie: $4\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot b$ $b=2(\sqrt{3}-1)$ Odpowiedź: Długość b jest równa $2\sqrt{3}-2$ cm. **<u>Schemat punktowania:</u>** **Podpunkt (a)** **2 punkty** poprawna metoda obliczenia pola czworokąta, poprawne obliczenia i podanie

poprawnej odpowiedzi $\left(4(\sqrt{3}-1\right)$ cm^2)

1 punkt

poprawna metoda obliczenia pola czworokąta

lub

poprawne obliczenie pola trójkąta ACD

lub

poprawne obliczenie pola trójkąta ACB

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (b)

3 punkty

poprawna metoda obliczenia stosunku obwodów dwunastokątów, poprawne obliczenia i podanie poprawnej odpowiedzi w poprawnej postaci $\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}+\frac{2}{3}\right)$

2 punkty

poprawna metoda obliczenia obwodów obu dwunastokątów **oraz** poprawna metoda obliczenia stosunku obwodów dwunastokątów

lub

poprawne obliczenie obwodu dwunastokąta I **oraz** obwodu dwunastokąta II

1 punkt

poprawna metoda obliczenia obwodu dowolnego z dwunastokątów

lub

poprawne obliczenie długości odcinka AB lub odcinka BC

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (c)

3 punkty

poprawna metoda obliczenia długości a, poprawne obliczenia i podanie poprawnej odpowiedzi ($2(2\sqrt{3}-1)$ cm)

2 punkty

poprawna metoda obliczenia długości przekątnej BD czworokąta $ABCD$ i poprawna metoda obliczenia długości a

lub

poprawne obliczenie długości przekątnej BD czworokąta $ABCD$

lub

poprawne obliczenie wysokości trójkąta równobocznego o boku długości 4 cm **oraz** poprawne obliczenie wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C

1 punkt

poprawna metoda obliczenia długości przekątnej BD czworokąta $ABCD$

lub

poprawna metoda obliczenia wysokości trójkąta równobocznego o boku długości 4 cm

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (d)

2 punkty

poprawna metoda obliczenia długości b, poprawne obliczenia i podanie poprawnej odpowiedzi ($2\left(\sqrt{3}-1\right)$ cm)

1 punkty

poprawna metoda obliczenia długości b

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Uwaga:

- Podanie poprawnej odpowiedzi bez odpowiedniej jednostki nie jest uznane za błąd arytmetyczny. Podanie jednostki błędnej jest traktowane jako błąd arytmetyczny.