

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Numer zadania	Liczba punktów za zadanie	Klucz odpowiedzi				
		A	B	C	D	E
1.	2				X	
2.	2		X			
3.	2				X	
4.	2			X		
5.	2		X			
6.	2				X	
7.	3	X				
8.	3		X			
9.	3			X		
10.	3	X				
11.	3	X				
12.	3					X

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania zamknięte: **30**

SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ OTWARTYCH

1. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie poprawnie alternatywnym sposobem, otrzymuje pełną liczbę punktów.
2. Jeśli uczeń popełnia błędy rachunkowe, ale **sposób** rozwiązania zadania jest w całości poprawny, rozwiązanie konsekwentnie doprowadzone do końca, a błąd nie powoduje znacznego uproszczenia zadania, to uczeń traci tylko 1 punkt za zadanie (bez względu na etap, na którym błąd został popełniony).

Łączna liczba punktów możliwych do zdobycia za zadania otwarte: **30**

ZADANIE 13.

9p

Poprawna odpowiedź	Punktacja
	<u>Przykładowe rozwiązanie:</u> a) I. $2^b \cdot 3^b$ II. $2^a \cdot 3^a$ b) Zapisujemy liczby $12^c, 18^d$ w postaci iloczynów potęg liczb 2 i 3: $12^c = 2^{2c} \cdot 3^c, 18^d = 2^d \cdot 3^{2d}$ Zauważamy, że jeśli $\frac{1}{2}d < c < \frac{3}{4}d$, to $d < 2c < \frac{3}{2}d$. Znajdujemy $NWD(12^c, 18^d) = NWD(2^{2c} \cdot 3^c, 2^d \cdot 3^{2d}) = 2^d \cdot 3^c$ Znajdujemy $NWW(12^c, 18^d) = NWW(2^{2c} \cdot 3^c, 2^d \cdot 3^{2d}) = 2^{2c} \cdot 3^{2d}$ Następnie upraszczamy lewą i prawą stronę równania: $L = NWW(12^c, NWD(12^c, 18^d)) = NWW(2^{2c} \cdot 3^c, 2^d \cdot 3^c) = 2^{2c} \cdot 3^c$ $= 12^c$ $P = NWD(12^c, NWW(12^c, 18^d)) = NWD(2^{2c} \cdot 3^c, 2^{2c} \cdot 3^{2d}) = 2^{2c} \cdot 3^c$ $= 12^c$ Stąd skoro lewą i prawą stronę równania można uprościć do tego samego wyrażenia, równanie jest prawdziwe. c) $NWD(m, n)$ jest równy 36, więc obie liczby m oraz n można zapisać w postaci iloczynów: $m = 2^2 \cdot 3^2 \cdot x$ oraz $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot y$, gdzie x i y są pewnymi liczbami całkowitymi. Stąd: $12^5 = mn$ $2^{10} \cdot 3^5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot y$ $2^6 \cdot 3 = xy$ Aby największy wspólny dzielnik liczb m i n był równy 36, tylko jedna z liczb x i y może być podzielna przez 2 i tylko jedna może być podzielna przez 3. Stąd otrzymujemy 4 opcje: $\begin{cases} x = 2^6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2^6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2^6 \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2^6 \cdot 3 \\ y = 1 \end{cases}$ Znajdujemy wszystkie możliwe pary liczb m oraz n: $\begin{cases} m = 2^8 \cdot 3^2 \\ n = 2^2 \cdot 3^3 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2^2 \cdot 3^3 \\ n = 2^8 \cdot 3^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2^2 \cdot 3^2 \\ n = 2^8 \cdot 3^3 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2^8 \cdot 3^3 \\ n = 2^2 \cdot 3^2 \end{cases}$ <u>Schemat punktowania:</u> Podpunkt (a) 2 punkty zapisanie dwóch poprawnych odpowiedzi 1 punkt zapisanie jednej poprawnej odpowiedzi 0 punktów błędne odpowiedzi lub brak odpowiedzi Podpunkt (b) 4 punkty poprawne wyznaczenie $NWD(12^c, 18^d)$ oraz poprawne wyznaczenie $NWW(12^c, 18^d)$ oraz poprawny sposób przekształcenia obu stron równości do postaci pozwalającej uzasadnić równość
a) I. $2^b \cdot 3^b$ II. $2^a \cdot 3^a$ b) dowód c) $\begin{cases} m = 2^8 \cdot 3^2 \\ n = 2^2 \cdot 3^3 \end{cases}, \begin{cases} m = 2^2 \cdot 3^3 \\ n = 2^8 \cdot 3^2 \end{cases}, \begin{cases} m = 2^2 \cdot 3^2 \\ n = 2^8 \cdot 3^3 \end{cases}, \begin{cases} m = 2^8 \cdot 3^3 \\ n = 2^2 \cdot 3^2 \end{cases}$	

	3 punkty poprawne wyznaczenie $NWD(12^c, 18^d)$ oraz poprawne wyznaczenie $NWW(12^c, 18^d)$ oraz poprawny sposób przekształcenia obu stron równości do postaci iloczynu potęg liczb 2 i 3 lub 4 i 3 lub potęgi liczby 12 2 punkty poprawne wyznaczenie $NWD(12^c, 18^d)$ oraz poprawne wyznaczenie $NWW(12^c, 18^d)$ 1 punkt poprawna metoda wyznaczenia $NWD(12^c, 18^d)$ lub poprawna metoda wyznaczenia $NWW(12^c, 18^d)$ 0 punktów uzasadnienie równości dla wybranych wartości zmiennych c i d lub brak rozwiązania Podpunkt (c) 3 punkty zapisanie wszystkich par liczb m i n 2 punkt zapisanie dwóch par liczb m i n 1 punkt zapisanie jednej pary liczb m i n lub zapisanie liczb m i n w postaci $36x$ i $36y$ oraz zapisanie równania $12^5 = 36x \cdot 36y$ 0 punktów błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania
--	--

ZADANIE 14.

10p

Poprawna odpowiedź	Punktacja
a) $2,25\sqrt{3} + 9 + \pi$ b) $\frac{2a+3a\sqrt{2}+a\sqrt{6}}{2} + 2\pi$ c) dowód	Przykładowe rozwiązanie: a) Obliczamy pole trójkąta ABC: $\frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = 2,25\sqrt{3}$ Obliczamy pola prostokątów: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ Aby obliczyć pole jednego wycinka koła, ustalamy kąt środkowy: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ Obliczamy pole jednego wycinka koła: $\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi(1)^2 = \frac{\pi}{3}$ Stąd, pole figury F to: $2,25\sqrt{3} + 9 + 3 \cdot \frac{\pi}{3} = 2,25\sqrt{3} + 9 + \pi$ b) Aby obliczyć długość boku AB i boku AC, prowadzimy wysokość z wierzchołka C i oznaczamy punkt przecięcia wysokości z bokiem AB jako D. Trójkąt DBC ma kąty miary $45^\circ, 45^\circ$ i 90°. Stąd, $DB = DC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trójkąt ADC ma kąty miary $30^\circ, 60^\circ$ i 90°. Stąd, $AC = 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$ oraz $AD = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Obliczamy kąty środkowe wycinków kół; przy wierzchołku A: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ$; przy wierzchołku B: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$; przy wierzchołku C: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. Obliczamy łączną długość łuków w obwodzie figury F: $\frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{360^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ Obliczamy obwód figury F: $a + a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{6}}{2} + 2\pi$ c) Niech trójkąt ABC ma boki długości a, b oraz c oraz kąty miary α, β oraz γ. Obwód figury F składa się z sumy długości boków trzech prostokątów o wartości $a + b + c$ oraz trzech łuków. Obliczamy kąty środkowe wycinków kół; przy wierzchołku A: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$; przy wierzchołku B: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \beta = 180^\circ - \beta$; przy wierzchołku C: $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \gamma = 180^\circ - \gamma$. Obliczamy łączną długość łuków w obwodzie figury F: $\frac{180^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{180^\circ - \beta}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{180^\circ - \gamma}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 =$ $= \frac{540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{540^\circ - 180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = 2\pi$ Stąd, obwód figury F to: $a + b + c + 2\pi$ i jest większy od obwodu trójkąta o 2π.

Schemat punktowania:

Podpunkt (a)

3 punkty

poprawna metoda obliczenia pola figury F , poprawne obliczenia i poprawny wynik

2 punkty

poprawna metoda obliczenia pola figury F

1 punkt

poprawna metoda obliczenia pola jednego wycinka koła

lub

poprawna metoda obliczenia pola trójkąta ABC

lub

uzasadnienie, że z tych trzech wycinków można zbudować koło

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (b)

4 punkty

poprawny sposób obliczenia obwodu figury F , zapisanie poprawnego wyrażenia zmiennej a opisującego obwód figury F

3 punkty

poprawny sposób obliczenia obwodu figury F

2 punkty

zapisanie wyrażenia zmiennej a przedstawiającego obwód trójkąta ABC

lub

poprawny sposób obliczenia sumy długości łuków figury F

1 punkt

zapisanie wyrażenia zmiennej a opisującego długość odcinka AC lub odcinka AB

lub

obliczenie miary jednego z kątów środkowych wycinków koła powstałych przy wierzchołkach trójkąta

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (c)

3 punkty

uzasadnienie, że różnica obwodów trójkąta ABC i figury F jest równa 2π

2 punkty

poprawna metoda obliczenia sumy długości łuków figury F

1 punkt

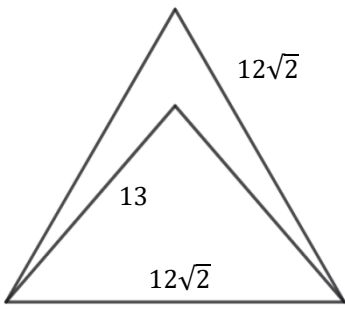
zapisanie zależności między miarami kątów wewnętrznych trójkąta a miarami kątów środkowych wycinków koła utworzonych przy wierzchołkach trójkąta

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

ZADANIE 15.

11p

Poprawna odpowiedź	Punktacja
a) 578 b) $52 + 41\sqrt{2}$ c) ΔABE, o polu: $72\sqrt{3}$	Przykładowe rozwiązanie: a) Zauważamy, że przekątne podstawy dzielą ją na dwa trójkąty podobne ABS i CDS. Znajdujemy wysokość podstawy $ABCD$, korzystając z własności trójkątów o kątach miary $45^\circ, 45^\circ$ i 90° i podobieństwa trójkątów: $\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ Obliczamy długość krawędzi AB, korzystając z podobieństwa trójkątów: $\frac{12}{5} \cdot 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ Obliczamy pole podstawy ostrosłupa ze wzoru na pole trapezu: $P_p = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2} + 12\sqrt{2}) \cdot \frac{17\sqrt{2}}{2} = \frac{289}{2}$ Obliczamy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{289}{2} \cdot 12 = 578$ b) Długość przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 5 i 12 jest równa 13, więc $AD = BC = EC = ED = 13$. Trójkąty ASE i BSE są prostokątne i równoramienne o ramionach długości 12, więc $BE = AE = 12\sqrt{2}$. Sumujemy długości wszystkich krawędzi: $4 \cdot 13 + 2 \cdot 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 17\sqrt{2} = 52 + 41\sqrt{2}$ c) Porównujemy długości krawędzi: $5\sqrt{2} < 13 < 12\sqrt{2}$, ponieważ $\sqrt{50} < \sqrt{169} < \sqrt{288}$. Stąd pole trójkąta równobocznego ABE o boku długości $12\sqrt{2}$ jest większe od pola trójkąta równoramiennego ADE lub trójkąta równoramiennego BCE o krawędziach długości 13, 13, $12\sqrt{2}$. Pole ściany ABE jest równe: $\frac{(12\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}$ Porównamy pola ścian ABE i CDE. Obliczamy wysokość ściany CDE, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $\sqrt{12^2 + (2.5\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{626}{4}} = \frac{\sqrt{626}}{2}$ Stąd pole ściany CDE jest równe: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{626}}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{313}}{2}$. Szacując, $\sqrt{313} < \sqrt{324} = 18$, stąd $\frac{5\sqrt{313}}{2} < \frac{5 \cdot 18}{2} = 45 < 72\sqrt{3}$. Ustalamy, że ściana ABE ma największe pole równe $72\sqrt{3}$. 

Schemat punktowania:

Podpunkt (a)

4 punkty

poprawna metoda obliczenia objętości ostrosłupa, poprawne obliczenia i poprawny wynik

3 punkty

poprawna metoda obliczenia objętości ostrosłupa

2 punkty

poprawna metoda obliczenia pola podstawy ostrosłupa

1 punkt

poprawna metoda obliczenia wysokości trapezu $ABCD$
lub

poprawna metoda obliczenia długości krawędzi AB

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (b)

2 punkty

Poprawne zapisanie sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa

1 punkt

poprawna metoda obliczenia długości wszystkich krawędzi ostrosłupa

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Podpunkt (c)

Sposób I

5 punktów

poprawna metoda ustalenia, która ściana na największe pole, poprawne obliczenia i poprawny wynik

4 punkty

poprawna metoda ustalenia, która ściana na największe pole

3 punkty

poprawna metoda obliczenia pola ABE

2 punkty

poprawne uzasadnienie, że pole trójkąta ABE jest większe od pola trójkąta ADE lub trójkąta BCE

1 punkt

poprawne uzasadnienie, że $|BC| < |AB|$

0 punktów

błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Sposób II

5 punktów

poprawna metoda ustalenia, która ściana na największe pole, poprawne obliczenia i poprawny wynik

4 punkty

poprawna metoda ustalenia, która ściana na największe pole

3 punkty

poprawna metoda obliczenia pól wszystkich ścian bocznych ostrosłupa

2 punkty

poprawna metoda obliczenia pola trójkąta DCE

1 punkt

poprawna metoda obliczenia wysokości trójkąta DCE

0 punktów

Błędne rozwiązanie lub brak rozwiązania

Uwaga:

- W podpunkcie (b) nie wymaga się przedstawienia obliczeń.